Stochastik I
Sommersemester 2018
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
M.Sc. Todor Bilarev
Dipl.-Math. Peter Frentrup

Aufgaben - besprochen in den Übungen 14.05.18 – 18.05.18

Aufgabe 1 (Dichtefunktion)

Zu Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{falls } |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für welche Werte von a und b ist f eine Dichtefunktion?

Aufgabe 2 (Cantorfunktion)

Sei $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ wie folgt rekursiv definiert:

$$F_0(x) = x \text{ für } 0 \le x \le 1, \qquad F_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} F_n(3x) & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} F_n(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{für } \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie die Graphen von F_1, F_2 und F_3.

b) Zeigen Sie, dass $|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \le \dfrac{1}{6 \cdot 2^n}$ für alle $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, und zeigen Sie, dass der Limes $F(x) := \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$ existiert.

c) Beweisen Sie, dass $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ und $F : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige wachsende Funktion ist (d.h. F ist Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf $(\Omega, \mathcal{F}) = \big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\big)$: $\mu([0,x]) = F(x)$).

d) Beweisen Sie, dass μ weder eine Zähldichte, noch eine Dichte besitzt.