Stochastik I
Sommersemester 2018
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
M.Sc. Todor Bilarev
Dipl.-Math. Peter Frentrup

Aufgaben - besprochen in den Übungen 28.05.18 – 31.05.18

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Jede stetige Funktion ist Borel-messbar.

b) Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine messbare Abbildung. Dann ist $F(x) := \mathbb{P}[X \geq x]$ eine Verteilungsfunktion, d.h. F ist rechtsstetig und monoton wachsend mit

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

c) Für $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ messbar (d.h. eine Zufallsvariable) definiert $\mathbb{P}_X[B] := \mathbb{P}[X^{-1}(B)]$, $B \in \mathcal{F}'$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega', \mathcal{F}')$.

d) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die Zähldichte der konstanten Zufallsvariable $X(\omega) := c$ für alle $\omega \in \Omega$ lautet:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = c, \\ 0 & \text{für } x \neq c. \end{cases}$$

(Insbesondere nimmt X Werte in einem diskreten Maßraum an, sodass die *Zähldichte* von vorn herein wohldefiniert ist)

Aufgabe 2

a) Sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung die Standardnormalverteilung ist. Berechnen Sie die Dichte von X^2.

b) Sei X eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\alpha > 0$, d.h. X hat die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $Y := \frac{1}{X} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(X)$ auch Cauchy-verteilt ist. Berechnen Sie ihren Parameter.

c) Sei X gleichverteilt auf $(-\pi/2, \pi/2)$. Zeigen Sie, dass $Y := \tan(X)$ Cauchy-verteilt mit Parameter 1 ist.