



Übungsserie 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

An einer Schule werden die Unterrichtsstunden in Biologie, Geographie, Englisch, Französisch, Geschichte und Mathematik von drei Lehrerinnen gehalten: Frau Meyer, Frau Wegener und Frau Teichert. Jede von ihnen lehrt in zwei Fächern.

Angenommen Sie müssten raten, wer welches Fach unterrichtet. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mit Ihrem Tipp richtig liegen? Stellen Sie dazu ein geeignetes mathematisches Modell auf, indem sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konkret angeben. Argumentieren Sie präzise.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{Z} = \{Z_i \mid i \in I\}$ mit einer Indexmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ eine abzählbare Zerlegung von Ω in disjunkte Teilmengen.

- Geben Sie die kleinste σ -Algebra $\sigma(\mathcal{Z})$ über Ω an, die das Mengensystem \mathcal{Z} umfasst.
- Bestimmen Sie mittels a) für $\Omega = [0, 1)$ die σ -Algebren

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left\{ [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \mid k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \right\}\right).$$

- Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$ eine Algebra über $[0, 1)$ bildet. Ist \mathcal{F} auch eine σ -Algebra?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zu einer Tanzstunde kommen n Paare. Um für Abwechslung zu sorgen, wird jeder Dame rein zufällig einer der Herren zugelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein ursprüngliches Paar miteinander tanzen wird? Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Beweisen Sie:

$$\text{a) } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j),$$

$$\text{b) } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k).$$

Abgabe: Montag, 30.04.2017, vor der Vorlesung

Die Lösungen sind in Zweiergruppen und auf separaten Blättern zu bearbeiten. Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihre Namen, Matrikelnummern und Ihre Übungsgruppe an.