Stochastik I
Sommersemester 2018
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
M.Sc. Todor Bilarev
Dipl.-Math. Peter Frentrup

Übungsserie 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignissen $A, B \in \mathcal{F}$.

a) Angenommen, $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Zeigen Sie, dass dann $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$. Zeigen Sie durch Angabe konkreter Beispiele, dass die beiden Grenzen angenommen werden können.

b) Beweisen Sie: Falls $A \cup B = \Omega$, so gilt $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$.

c) Zeigen Sie, dass stets $\mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$.

a) Eine Menge $\mathcal{G}$ heißt konvex, wenn für je zwei Punkte $x, y \in \mathcal{G}$ gilt: $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \mathcal{G}$ für alle $\alpha \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ konvex ist.

b) Sei nun $(\Omega, \mathcal{F})$ ein diskreter Maßraum, d.h. Ω ist höchstens abzählbar unendlich. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \in \mathcal{M}$ heißt Extremalpunkt, falls aus $\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2 = Q$ für $\alpha \in (0, 1)$, $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}$ folgt, dass $Q = Q_1 = Q_2$.
Beschreiben Sie die Extremalpunkte von $\mathcal{M}$. Zeigen Sie, dass es höchstens abzählbar viele Extremalpunkte $\mathbb{P}_i$, $i \in I$, gibt und dass sich jedes $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$ als „Mischung" dieser $\mathbb{P}_i$ darstellen lässt, d.h.

$$\mathbb{P} = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{P}_i \quad \text{mit } \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i \in I} \alpha_i = 1 \text{ und } \mathbb{P}_i \text{ extremal.}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Schreiben Sie in folgenden Teilaufgaben jeweils zuerst einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf und berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeiten geeigneter Ereignisse, um die Fragen beantworten zu können.

a) Antoine wundert sich, dass er beim wiederholten Werfen dreier Würfel die Augensumme 11 häufiger beobachtet als die 12, obwohl doch die 11 durch die Kombinationen 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3 und die Augensumme 12 durch ebensoviele Kombinationen erzeugt würde. Kann diese Beobachtung Zufall sein oder ist seine Argumentation falsch?

b) Würden Sie beim gleichzeitigen Werfen von vier Würfeln eher auf das Erscheinen mindestens einer Sechs wetten oder darauf, dass keine Sechs erscheint?

c) Wie viele faire Münzen muss man werfen, damit die Wahrscheinlichkeit nur Kopf zu werfen ungefähr so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser im Lotto (6 aus 49)?

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Ein Pfeifenraucher hat in jeder seiner beiden Jackentaschen jeweils eine Streichholzschachtel. Jedes Mal, wenn er ein Streichholz benötigt, wählt er unabhängig von seinem vorherigen Verhalten rein zufällig (d.h. mit gleicher Wahrscheinlichkeit) eine der beiden Jackentaschen aus und entnimmt derjenigen Schachtel ein Streichholz. In jeder Schachtel seien zu Beginn N Streichhölzer. Berechnen Sie die Verteilung der in der anderen Schachtel verbliebenen Streichhölzer, wenn er feststellt, dass die erste Schachtel leer ist.

Abgabe: Montag, 07.05.2017, **vor** der Vorlesung
Die Lösungen sind in Zweiergruppen und auf separaten Blättern zu bearbeiten. Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihre Namen, Matrikelnummern und Ihre Übungsgruppe an.