Stochastik I
Sommersemester 2018
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
M.Sc. Todor Bilarev
Dipl.-Math. Peter Frentrup

Übungsserie 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Man wähle einen Punkt (x, y) rein zufällig aus dem Einheitsquadrat $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Rechteck mit den Eckpunkten $(0,0), (x,0), (0,y)$ und (x,y) eine Fläche von mehr als $1/2$ besitzt?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ gegeben durch

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbb{1}_{[1/n,\infty)}(x).$$

Zeigen Sie, dass es sich um die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ handelt, und berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}([1,\infty)), \quad \mathbb{P}([1/10,\infty)), \quad \mathbb{P}(\{0\}), \quad \mathbb{P}((-5,1/2)), \quad \mathbb{P}(\mathbb{Q}).$$

Bestimmen Sie den *Träger* von $\mathbb{P}$:

$$\operatorname{supp}(\mathbb{P}) := \bigcap \Big\{ A \subseteq \mathbb{R} \;\Big|\; A \text{ ist abgeschlossen und } \mathbb{P}(A) = 1 \Big\}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass F höchstens abzählbar viele Sprungstellen hat.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
In einer Urne liegen r rote und b blaue Kugeln mit $r > b$. Wir ziehen die Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen. Uns interessiert das Ereignis $A_{r,b}$, dass dabei nach jedem Zug stets strikt mehr rote als blaue Kugeln gezogen wurden.

a) Erstellen Sie für das Zufallsexperiment einen Wahrscheinlichkeitsraum mit

$$\begin{aligned}\Omega = \{g : \{0,\ldots,r+b\} \to \mathbb{N}_0^2 \mid\ & g(0) = (0,0), g(r+b) = (b,r), \\ & g(i) - g(i-1) \in \{(0,1),(1,0)\}, i = 1,\ldots,r+b\}\end{aligned}$$

als Ereignismenge. Interpretieren Sie Ω als Pfade auf dem Gitter $\mathbb{N}_0^2$ und stellen Sie eine Realisierung gemeinsam mit der Diagonalen in dem Gitter dar.

b) Formalisieren Sie die Ereignisse A_1 : „Pfad geht durch den Punkt $(1,0)$" und A_2 : „Pfad geht durch den Punkt $(0,1)$, liegt aber nicht oberhalb der Diagonalen" in Ω. Weisen Sie $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und mit einem geeigneten Spiegelungsargument $|A_1| = |A_2|$ nach.

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(A_{r,b}) = \frac{r-b}{r+b},$$

indem Sie das Ereignis $A_{r,b}$ durch A_1 und A_2 ausdrücken.

Abgabe: Montag, 14.05.2017, **vor** der Vorlesung
Die Lösungen sind in Zweiergruppen und auf separaten Blättern zu bearbeiten. Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihre Namen, Matrikelnummern und Ihre Übungsgruppe an.