Stochastik I
Sommersemester 2018
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
M.Sc. Todor Bilarev
Dipl.-Math. Peter Frentrup

Übungsserie 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bei dem Spiel Skat erhält jeder Spieler 10 Karten aus einem Kartenspiel von 32 Karten. Uns interessiert das Ereignis A_{k_1,k_2,k_3,k_4}, dass ein bestimmter Spieler genau k_1 Karten der Farbe Karo, k_2 Karten der Farbe Herz, k_3 Karten der Farbe Pik und k_4 Karten der Farbe Kreuz erhält.

a) Stellen Sie ein geeignetes Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf und berechnen Sie $\mathbb{P}\left(A_{k_1,k_2,k_3,k_4}\right)$.

b) Auf $\widetilde{\Omega} = \{0, \ldots, 10\}^4$ definieren wir die Funktion $p : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ via $(k_1, k_2, k_3, k_4) \mapsto \mathbb{P}\left(A_{k_1,k_2,k_3,k_4}\right)$. Zeigen Sie, dass p die Zähldichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\widetilde{\mathbb{P}}$ auf $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{P}(\widetilde{\Omega}))$ ist.

c) Berechnen Sie für $r = 1, 2, 3$ und alle r-elementigen Teilmengen $J_r := \{l_1, \ldots, l_r\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ die Randverteilungen $\mathbb{P}_{J_r}$, die gegeben sind durch

$$\mathbb{P}_{J_r}(B) := \widetilde{\mathbb{P}}\left(\mathcal{P}_{J_r}^{-1}(B)\right) \quad \forall\ B \subset \{0, \ldots, 10\}^r,$$

wobei $\mathcal{P}_{J_r} : \{0, \ldots, 10\}^4 \to \{0, \ldots, 10\}^r$, $(k_1, k_2, k_3, k_4) \mapsto (k_{l_1}, \ldots, k_{l_r})$ den Projektionsoperator bezeichnet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die *Gammaverteilung* $\Gamma(\alpha, \beta)$ zu den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ ist gegeben durch ihre Dichte

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$, $t > 0$. Es sei nun $\mathbb{Q}$ die durch

$$\mathbb{Q}(\{k\}) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} f_{\alpha,\beta}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda, \quad k = 0, 1, \ldots$$

definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie, dass Γ die Funktionalgleichung $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$, $t > 0$, erfüllt.

b) Weisen Sie nach, dass $f_{\alpha,\beta}$ in der Tat eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ eine sogenannte *negative Binomialverteilung* ist, d.h. es gilt

$$\mathbb{Q}(\{k\}) = \binom{-r}{k} p^r (p-1)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

mit geeigneten Parametern $r > 0$ und $p \in (0, 1)$. Hierbei ist für $a \in \mathbb{R}$:

$$\binom{a}{k} := \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(k-1))}{k!}, \ k \in \mathbb{N}; \qquad \binom{a}{0} := 1.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Im Punkt $(0, p) \in \mathbb{R}^2$ mit $p > 0$ befindet sich eine Quelle radioaktiver Strahlung, die gleichmäßig Partikel in alle Richtungen, die die x-Achse irgendwann treffen, ausstößt. Für $a < b \in \mathbb{R}$ bezeichne $C_{a,b}$ das Ereignis, dass ein rein zufällig ausgewähltes Partikel die x-Achse im Interval $[a, b]$ treffe.

a) Stellen Sie ein geeignetes Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf. Berechnen Sie $\mathbb{P}(C_{a,b})$.

b) Wir definieren

$$F(b) := \lim_{a \to -\infty} \mathbb{P}(C_{a,b}).$$

Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist.

c) Besitzt die von F festgelegte Verteilung eine Dichte? Falls ja, berechnen Sie diese. Um welche Verteilung handelt es sich?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Es bezeichne $\mathbb{P}_\lambda$ die Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Exponentialverteilung in folgendem Sinne *gedächtnislos* ist:

$$\forall\, t, x > 0 \;:\; \mathbb{P}_\lambda((x + t, \infty) \mid (t, \infty)) = \mathbb{P}_\lambda((x, \infty)). \tag{1}$$

b) Es sei nun $\mathbb{P}$ eine absolutstetige Verteilung auf $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, die gedächtnislos im Sinne von (1) ist.

(i) Zeigen Sie, dass für $G(t) := \mathbb{P}((t, \infty))$, $t \geq 0$, gilt:

$$G(t) = G(1)^t, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie (2) zunächst für $t \in \mathbb{N}$, dann für $t \in \mathbb{Q}_+$ und schließlich für $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Folgern Sie, dass $\mathbb{P}$ eine Exponentialverteilung ist. Bestimmen Sie ihren Parameter.

Abgabe: Dienstag, 22.05.2017, **vor** der Vorlesung
Die Lösungen sind in Zweiergruppen und auf separaten Blättern zu bearbeiten. Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihre Namen, Matrikelnummern und Ihre Übungsgruppe an.