Stochastik I
Sommersemester 2018
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
M.Sc. Todor Bilarev
Dipl.-Math. Peter Frentrup

Übungsserie 5

Aufgabe 1 (3 Punkte)

a) Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien $A, B \in \mathcal{F}$ zwei disjunkte Ereignisse. Zeigen Sie, dass A und B nur dann unabhängig sein können, wenn $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(B) = 0$ gilt.

b) Sei $\Omega = \{1, 2, \dots, p\}$ für eine Primzahl p, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(A) = |A|/p$, $A \in \mathcal{F}$, die Gleichverteilung auf Ω. Zeigen Sie: Sind $A, B \in \mathcal{F}$ unabhängige Ereignisse, so ist mindestens eines von beiden $\emptyset$ oder Ω.

c) Seien $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ unabhängige Ereignisse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass keines der $A_1, \dots, A_n$ eintritt, kleiner oder gleich $\exp\big(-\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\big)$ ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es bezeichne $\boldsymbol{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ die Menge aller Primzahlen. Für $s > 1$ definieren wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}_s$ auf $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ durch

$$\mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{wobei } \zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

a) Für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ bezeichne A_p das Ereignis, dass p das Ergebnis n teilt, also $A_p = \{n \in \mathbb{N} : p \mid n\}$. Zeigen Sie, dass die $(A_p)_{p \in \boldsymbol{P}}$ unter $\mathbb{P}_s$ unabhängig sind.

b) Offensichtlich gilt $\frac{1}{\zeta(s)} = \mathbb{P}_s(\{1\})$. Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \boldsymbol{P}} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln. Julia zieht rein zufällig eine Kugel, notiert ihre Farbe und wirft sie anschließend zusammen mit d weiteren Kugeln der gleichen Farbe zurück in die Urne. Diesen Vorgang wiederholt sie unendlich oft.

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel blau ist?

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Kugel blau war, wenn wir wissen, dass die zweite blau ist?

c) Sei B_n das Ereignis, dass die n-te Kugel blau ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$ für alle $n \geq 1$.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel blau ist unter der Bedingung, dass die folgenden n Kugeln alle blau sind. Berechnen Sie den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sie haben sich nachts im Berliner Tiergarten verlaufen und fragen Passanten um Hilfe. Zwei Drittel aller Passanten sind Touristen und beantworten Ihre Frage nach der Richtung mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ korrekt (dabei sind die Antworten zu wiederholten Fragen unabhängig, selbst dann, wenn Sie derselben Person dieselbe Frage mehrmals stellen). Die übrigen Passanten sind Berliner, welche Ihnen stets falsch antworten.

a) Sie fragen einen zufälligen Passanten, ob Sie auf dem richtigen Weg zum Brandenburger Tor sind. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine Antwort korrekt ist?

b) Sie stellen einem zufälligen Passanten n-mal unmittelbar nacheinander dieselbe Frage wie in a) und erhalten stets dieselbe Antwort. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die gegebene Antwort korrekt ist für $n = 2, 3, 4$.

c) Sie stellen einem zufälligen Passanten viermal unmittelbar nacheinander dieselbe Frage wie in a). Er gibt Ihnen drei mal dieselbe Antwort und beim vierten Mal eine andere Antwort. Zeigen Sie, dass die erste Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ korrekt ist.

Lisa ist in der gleichen Situation wie Sie, kann sich jedoch besser orientieren und hat Grund zu der Annahme, dass sie mit Wahrscheinlichkeit $\varepsilon \in (0, 1)$ bereits in die richtige Richtung geht. Sie stellt einem zufälligen Passanten die Frage: „Laufe ich in die richtige Richtung?“. Zeigen Sie:

d) Egal, was die erste Antwort des Passanten ist, Lisa glaubt danach immer noch, dass sie mit Wahrscheinlichkeit ε in die richtige Richtung geht.

e) Sind die ersten beiden Antworten des Passanten identisch (entweder JJ: beide „Ja“, oder NN: beide „Nein“), so glaubt Lisa weiterhin, dass sie mit Wahrscheinlichkeit ε in die richtige Richtung geht.

f) Nach drei identischen Antworten wird Lisa die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass sie in die richtige Richtung läuft, wie folgt berechnen:

$$\mathbb{P}\big(A \mid JJJ\big) = \frac{9\varepsilon}{11 - 2\varepsilon}, \qquad \mathbb{P}\big(A \mid NNN\big) = \frac{11\varepsilon}{9 + 2\varepsilon}.$$

Abgabe: Montag, 28.05.2017, **vor** der Vorlesung
Die Lösungen sind in Zweiergruppen und auf separaten Blättern zu bearbeiten. Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihre Namen, Matrikelnummern und Ihre Übungsgruppe an.