Stochastik I
Sommersemester 2018
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
M.Sc. Todor Bilarev
Dipl.-Math. Peter Frentrup

Übungsserie 6

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda_{[0,1)})$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$X_n(\omega) := \frac{\lfloor n\omega \rfloor}{n}, \quad \omega \in \Omega.$$

Dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

a) Zeigen Sie, dass $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_n.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ seien zwei unabhängige (Sub-)σ-Algebren auf Ω. Zeigen Sie, dass jede reellwertige Zufallsvariable X über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, die sowohl $\mathcal{G}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar, als auch $\mathcal{H}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist, fast sicher konstant sein muss, also $\mathbb{P}(X = c) = 1$ für eine Konstante c erfüllt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine Zufallsvariable und $\sigma(X) := \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\sigma(X)$ eine σ-Algebra über Ω ist.

b) Sei $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine $\sigma(X)$-messbare Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann eine messbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $Y(\omega) = h(X(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$ ist.

Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie unabhängiger, reellwertiger Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

c) Sind $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in I$, beliebige Borel-messbare Funktionen, so ist auch $(g_i(X_i))_{i \in I}$ eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen.

d) Im Fall $I = \{1, 2, 3\}$ und für Borel-messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sind die Zufallsvariablen $Y = f(X_1, X_2)$ und $Z = g(X_3)$ unabhängig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Der Zufallsvektor (X, Y) sei auf dem Einheitskreis gleichverteilt, d.h. (X, Y) habe die Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{falls } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Uns interessiert die Verteilung von (R, S) mit $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$ und $S := \arctan(Y/X)\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(X)$.

a) Zeigen Sie, dass (R, S) eine Dichte $f_{(R,S)}$ besitzt und bestimmen Sie diese.

b) Zeigen Sie nun, dass auch R eine Dichte f_R besitzt und bestimmen Sie diese.

Abgabe: Montag, 04.06.2017, **vor** der Vorlesung
Die Lösungen sind in Zweiergruppen und auf separaten Blättern zu bearbeiten. Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihre Namen, Matrikelnummern und Ihre Übungsgruppe an.