Stochastik I
Sommersemester 2018
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
M.Sc. Todor Bilarev
Dipl.-Math. Peter Frentrup

Übungsserie 7

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Es bezeichne $\mathcal{C}_\infty$ die terminale σ-Algebra der $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

a) $A := \left\{ \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty \right\} \in \mathcal{C}_\infty$ für $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$.

b) $\mathbb{P}\left(|S_n| \leq k \ \forall n\right) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ $\mathbb{P}$-f.s.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien X, Y unabhängige, $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^i} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots$$

Berechnen Sie:

a) $\mathbb{P}(\min\{X, Y\} \leq i)$ für $i \in \mathbb{N}$;

b) $\mathbb{P}(X = Y)$ und $\mathbb{P}(Y > X)$;

c) $\mathbb{P}(X \text{ teilt } Y)$;

d) $\mathbb{E}(a^X)$ für $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei (X, Y) eine $\mathbb{R}^2$-wertiger Zufallsvektor auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Verteilungsdichte (für geeignetes $c \in \mathbb{R}$)

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c(y - x)e^{-y} & \text{für } 0 \leq x \leq y \text{ und } 0 \leq y < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

b) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$.

d) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(Y)$.

e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(2X > Y)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer reellwertigen Zufallsvariablen $X \geq 0$. Es bezeichne $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ den Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}$ und es gelte $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = 1$. Wir definieren eine Mengenfunktion $Q : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ mittels $Q(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mathbb{1}_A)$.

a) Zeigen Sie, dass Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{F}$ aus $\mathbb{P}(A) = 0$ auch $Q(A) = 0$ folgt.

   Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung nicht gilt.

Im Folgenden gelte zusätzlich, dass $\mathbb{P}(X > 0) = 1$.

c) Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{E}_Q(Y) = \mathbb{E}_P(XY)$ für alle nicht-negativen Zufallsvariablen Y gilt, wobei $\mathbb{E}_Q$ der Erwartungswert bzgl. Q und $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ der Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}$ sei.

d) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{X}$ bezüglich Q integrierbar ist.

   Wir definieren nun eine weitere Mengenfunktion $R : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ als $R(A) := \mathbb{E}_Q \left(\frac{1}{X} \mathbb{1}_A \right)$ für $A \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass $R = \mathbb{P}$.

Abgabe: Montag, 11.06.2017, **vor** der Vorlesung
Die Lösungen sind in Zweiergruppen und auf separaten Blättern zu bearbeiten. Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihre Namen, Matrikelnummern und Ihre Übungsgruppe an.