Stochastik I
Sommersemester 2018
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
M.Sc. Todor Bilarev
Dipl.-Math. Peter Frentrup

Übungsserie 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien X und Y reellwertige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1} \exp(-(x^2+y^2)/2) & : \text{falls } x \cdot \operatorname{sgn}(y) \geq y \cdot \operatorname{sgn}(x) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases},$$

bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass X, Y, $X+Y$ und $X-Y$ jeweils normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) = 1$ bzw. $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X-Y) = 2$ sind.

b) Zeigen Sie, dass X und Y zwar unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $p \in (0,1)$ und es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass für $a \in (p,1)$ und $s > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right) \leq e^{-nas}\mathbb{E}\big(e^{sX_1}\big)^n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Beweisen Sie für $a \in (p,1)$ die Abschätzung

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right) \leq e^{-nh(a,p)} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei

$$h(a,p) := a \log\frac{a}{p} + (1-a)\log\frac{1-a}{1-p}.$$

c) Folgern Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \leq p \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $X \in L^2$ eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X.

a) Zeigen Sie, dass folgende Formel für den Erwartungswert gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \big(1 - F_X(x)\big)\,dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)\,dx.$$

b) Zeigen Sie, dass folgende Formel für das zweite Moment gilt:

$$\mathbb{E}[X^2] = 2\int_0^\infty x\big(1 - F_X(x)\big)\,dx - 2\int_{-\infty}^0 xF_X(x)\,dx.$$

c) Vereinfachen Sie die Formeln aus a) und b) für den Fall einer diskreten Zufallsvariablen X.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien U_1, U_2, U_3, U_4 unabhängige, gleichmäßig auf $[-1, 1]$ verteilte Zufallsvariablen.

a) Bestimmen Sie die Dichten von $U_1 + U_2$, von $U_1 + U_2 + U_3$ und von $U_1 + U_2 + U_3 + U_4$.

b) Zeichnen Sie die Dichten von $S_n^* := \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}(U_1 + \cdots + U_n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ sowie die Dichte der Standardnormalverteilung in ein Koordinatensystem (Computereinsatz gestattet).

Abgabe: Montag, 18. 06. 2017, **vor** der Vorlesung
Die Lösungen sind in Zweiergruppen und auf separaten Blättern zu bearbeiten. Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihre Namen, Matrikelnummern und Ihre Übungsgruppe an.