

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
Institut für Physik



Bachelorarbeit

Beispiele für die Algebren der Feynman-Graphen

eingereicht von: Lisa Laudan
geboren am: 22. August 1990 in Rüdersdorf
Betreuung: Prof. Dr. Dirk Kreimer
Dr. Christian Bogner
eingereicht am: 22. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	3
2.1	Quantenfeldtheorie	3
2.2	Feynman-Graphen	5
2.2.1	Was sind Feynman-Graphen?	5
2.2.2	Kanten, Vertizes und Gewichte	5
2.2.3	Beispiele	7
2.2.4	Anzahl der Schleifen (loop number)	10
2.3	Renormierung	12
3	Mathematische Grundlagen	13
3.1	Gruppe	13
3.2	Körper	14
3.3	Vektorraum	14
3.4	Algebra	15
4	Beispiele der Algebren	16
4.1	Pre-Lie-Algebra	16
4.1.1	Definition einer Pre-Lie-Algebra	16
4.1.2	Beispielrechnung einer Pre-Lie-Algebra	17
4.2	Lie-Algebra	19
4.2.1	Definition einer Lie-Algebra	19
4.2.2	Beweis Satz 1	20
4.3	Hopf-Algebra	22
4.3.1	Grundlagen einer Hopf-Algebra	22
4.3.2	Beispielrechnung einer Hopf-Algebra	26
5	Des Märchens schöner Schluss	29
6	Zusammenfassung	32

1 Einleitung

Es lässt sich vermuten, dass die Thematik der *Quantenfeldtheorie*, eine Theorie, welche verbreitete Anwendung in verschiedenen physikalischen Gebieten gefunden hat, eher komplex und schwierig wäre, jedoch sind die Konzepte und Techniken dieser Theorie ziemlich einfach und intuitiv. Das gilt unter anderem für die *Feynman-Graphen*. Die Berechnung von Feynman-Graphen erwiesen sich als äußerst nützlich im Umgang mit dem *Renormierungsprozess*. In Kapitel 2 werden die kursiven Begriffe näher erläutert.

Anfang des 20. Jahrhunderts wurden zwei bedeutende Theorien, die spezielle Relativitätstheorie und die Quantenmechanik, miteinander kombiniert und es entstand die Quantenfeldtheorie (QFT). In der QFT kann man physikalisch relevante Größen berechnen, welche durch bestimmte Funktionen, den sogenannten Green-Funktionen, zum Ausdruck gebracht werden können. Diese Funktionen werden durch eine formale Reihe beschrieben, welche aus verschiedenen Termen besteht. Man benutzt Feynman-Diagramme, um die Berechnungen der Terme zu vereinfachen. Diese Feynman-Diagramme mit steigender Anzahl von Schleifen werden kombinatorisch zunehmend komplizierter. Mit Hilfe der Feynman-Regeln lassen sich die Beiträge der Diagramme, die klassisch endlichdimensionalen Integrale, zur Green-Funktion bestimmen. Es trat jedoch das Problem auf, dass diese Integrale dazu neigten, unendlich zu sein. In der Quantenfeldtheorie tauchten somit Divergenzen auf, die es zu beheben galt.

Der Mathematiker Alain Connes und der Physiker Dirk Kreimer formulierten einen Renormierungsprozess, indem sie eine Hopf-Algebra benutzten, die aus Feynman-Graphen aufgebaut war.

Feynman-Graphen beschreiben die Wechselwirkungen zwischen Teilchen bei Berechnungen der störungstheoretischen QFT. Mit Hopf-Algebren lassen sich oft kombinatorische Probleme beschreiben. Man kann zur Vereinfachung ihrer Konstruktion eine Hopf-Algebra benutzen, welche aus Wurzelbäumen besteht. In dieser Bachelorarbeit soll es jedoch nicht um Wurzelbäume und Hopf-Algebren gehen, sondern viel mehr der Weg bis zur Hopf-Algebra beschrieben werden.

Auf dem Weg des Renormierungsprozesses begegnen einem verschiedene Algebren: die *Pre-Lie-Algebra*, die *Lie-Algebra* und abschließend die *Hopf-Algebra*. In Kapitel 3 werden die mathematischen Grundlagen gelegt, um die Definitionen dieser Algebren nachvollziehen zu können. Anschließend werden im Hauptteil, dem Kapitel 4, die Übergänge dieser Algebren ausführlich

beschrieben.

Die Quantenfeldtheorie bringt nun eine komplizierte Kombinatorik, nämlich die der Feynman-Graphen, mit sich, und so tauchen auch hier Hopf-Algebren auf. Ziel dieser Bachelorarbeit ist es, den Weg zur Hopf-Algebra anhand von Beispielen mit Feynman-Graphen zu verdeutlichen.

Mit Hilfe der Connes-Kreimer-Hopf-Algebra führt dies zu einem zufriedenstellenden Verständnis der Renormierung. Im fünften Kapitel wird abschließend die Lösung dieses Renormierungsprozesses erläutert.

Die Literatur für diese Bachelorarbeit ist weitestgehend in Englisch verfasst worden. An dieser Stelle soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass einzelne Wörter frei ins Deutsche übersetzt wurden.

2 Theorie

Zu Beginn soll nun erst einmal die grundlegende Theorie eingeführt werden. In diesem Kapitel soll klar gemacht werden, was die *Quantenfeldtheorie* beinhaltet. Außerdem wird auf den störungstheoretischen Ansatz aufmerksam gemacht. Des Weiteren werden die *Feynman-Graphen* eingeführt, sowie deren Aufbau beschrieben und einige Beispiele näher erläutert. Abschließend wird der Begriff des störungstheoretischen *Renormierungsprozesses* eingeführt und näher beschrieben.

2.1 Quantenfeldtheorie

Die Quantenfeldtheorie kombiniert drei Hauptthemen der modernen Physik: die Quantentheorie, das Feld-Konzept und das Relativitätsprinzip. Die Theorie unterliegt der modernen Elementarteilchenphysik und liefert wesentliche Werkzeuge für die Kern-, Atom-, Festkörper- und Astrophysik. Außerdem ermöglicht die Quantenfeldtheorie neue Verbindungen der Physik und der Mathematik.

Die Quantenmechanik ist eine Theorie, die einen großen Bereich der Physik gut beschreibt, jedoch vernachlässigt sie die spezielle Relativitätstheorie und ignoriert die Quantennatur der Kraftfelder. Somit könnte man auch sagen, dass sich die Quantenfeldtheorie aus der Quantenmechanik und der klassischen Feldtheorie zusammensetzt.

Die Quantenfeldtheorien sind ursprünglich als relativistische Streutheorien entwickelt worden. Für die Entwicklung einer Streutheorie sind verschiedene Prozesse nötig. Zunächst stellt man die Lagrangedichte für Quantenfelder auf, anschließend werden die Felder quantisiert. Mit den quantisierten Feldern wird eine Streutheorie beschrieben. Man stößt jedoch auf das Problem, das man divergierende Ausdrücke erhält.

In dieser Arbeit soll es um die störungstheoretische (auch perturbative) Quantenfeldtheorie (pQFT) gehen. Sicherlich geht dies weit zurück in die Vergangenheit, allerdings steht fest, dass die pQFT die Teilchenphysik schon immer bestimmte. Außerdem ist sie immer noch das einzige erfolgreiche Werkzeug, um die Theorie mit dem Experiment zu vergleichen. Daher ist es ausreichend genau, mit der Störungstheorie zu arbeiten.

Die Störungstheorie ist ein Näherungsverfahren, in dem Prozesse anhand der Anzahl ihrer Wechselwirkungen geordnet werden. Diese Prozesse tragen zu einem bestimmten Element der S-Matrix, auch Streumatrix genannt, bei.

Diese Streumatrix beschreibt Streuamplituden der Streutheorie. Mit Hilfe der Feynman-Diagramme kann man alle Terme der störungstheoretischen Entwicklung der S-Matrix konstruieren und berechnen.

In der Quantenelektrodynamik (QED) war die Anwendung der Störungstheorie sehr erfolgreich. Man benutzte die QED für eine Vielzahl von physikalischen Prozessen. In tiefsten Ordnungen lieferte die Störungstheorie eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Allerdings kam es in höheren Ordnungen zu Divergenzen. Einige Physiker u. a. Richard *Feynman* erkannten, dass diese Divergenzen auf unendliche Selbstenergie und einen unendlichen Betrag zu seiner elektrischen Ladung zurückzuführen sind. Aufgrund dieser Entdeckung gelang es die Divergenzen durch *Renormierung* der Masse und der Ladung zu beheben.

Auch in der Quantenchromodynamik (QCD), einer Quantenfeldtheorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung, kam es zu Erfolgen.

2.2 Feynman-Graphen

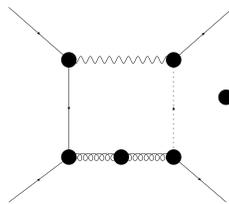
2.2.1 Was sind Feynman-Graphen?

Die wichtigste störungstheoretische Technik benutzt die Feynman-Graphen. Die Feynmanschen Graphen und Rechenregeln fassen die Quantenfeldtheorie in einer Form zusammen, die mit dem Experiment eng übereinstimmt.

Die Feynman-Diagramme sind bildhafte Darstellungen von Streuprozessen. Aus solch einer Darstellung wird ersichtlich welche Teilchen miteinander wechselwirken. Richard Feynman hatte sie zur vereinfachten Berechnung der Übergangsamplituden von elektromagnetischen Prozessen mit Hilfe der QED eingeführt. Die Feynman-Regeln beschreiben welche Wechselwirkungen möglich sind. Hierbei gibt es unterschiedliche Regeln für die Berechnung von schwachen (QED) und von starken Prozessen (QCD).

2.2.2 Kanten, Vertizes und Gewichte

Allgemein besteht ein Graph aus Kanten und Vertizes (Wechselwirkungspunkten).



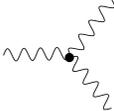
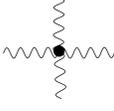
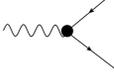
Eine Kante steht in einem Feynman-Graphen für ein sich ausbreitendes Teilchen. Sie kann je nach Teilchen verschiedene Formen annehmen. So steht zum Beispiel eine gerade Linie für ein Fermion. Photonen werden durch Wellenlinien, schwere Vektorbosonen durch gestrichelte Linien und Gluonen durch Schrauebenlinien gekennzeichnet. Fermionen und Bosonen werden zusätzlich mit einem Pfeil gekennzeichnet. Bei deren Antiteilchen verläuft der Pfeil entgegen der Zeitachse.

Die Vertizes sind in der Abbildung mit schwarzen Punkten gekennzeichnet. Jedem Vertex kann man ein Gewicht zuordnen. Das Gewicht eines Vertex ist die Anzahl der Kanten, die an ihm haften. Vertizes vom Gewicht 0 werden nicht berücksichtigt. Eine Kante, die sich an einem Vertex mit Gewicht 1

befindet, wird als Außenkante bezeichnet. Alle anderen Kanten sind Innenkanten.

In dieser Arbeit behandelt man one-particle irreducible Graphen (1PI), also von Ein-Teilchen irreduzible Graphen. Man spricht von einem 1PI Graphen, wenn alle Graphen durch Entfernen einer der Innenkanten erhalten bleiben und immer noch miteinander verbunden sind.

Die Feynman-Graphen werden nach festen Regeln, den sogenannten Feynman-Regeln, gezeichnet und berechnet. In der Quantenchromodynamik (QCD) gibt es beispielsweise nur eine Gluonlinie, eine Ghostlinie und eine Fermionlinie. Des Weiteren gibt es verschiedene Vertizes. Man schreibt diesen Linien und Vertizes verschiedene Gewichte zu. In der nachfolgenden Tabelle wurde dies einmal anschaulich dargestellt.

Bezeichnung	Darstellung	Gewicht
Gluon		2
Ghost		1
Fermion		1
Gluon-Gluon-Gluon-Vertex		-1
Gluon-Gluon-Gluon-Gluon-Vertex		0
Gluon-Fermion-Fermion-Vertex		0
Gluon-Ghost-Ghost-Vertex		0

Die Gewichte von Graphen lassen sich nun mithilfe folgender Formel berechnen:

$$\text{Gewicht}(\Gamma) = \text{„Anzahl der Loops“} \times 4 - \sum \text{aller Gewichte von Kanten und Vertizes} \quad (1)$$

2.2.3 Beispiele

Am Besten verdeutlicht man sich die Streuprozesse sowie die Berechnung der Streuamplituden anhand verschiedener Beispiele. In den gewählten Beispielen verläuft die Zeitachse von unten nach oben und die Raumachse zeigt nach rechts. Außerdem befindet sich an jedem Vertex ein Term des Übergangsmatrixelements, welcher die Struktur und Stärke der Wechselwirkung enthält. Das Übergangsmatrixelement enthält die Überlagerung der Amplituden von allen Diagrammen, die zum gleichen Endzustand führen. Bei Diagrammen höherer Ordnung treten jedoch höhere Potenzen von α auf, weil die Zahl der Vertizes größer ist. α bezeichnet die Kopplungskonstante. Je nach Wechselwirkung schreibt man ihr unterschiedliche Werte zu.

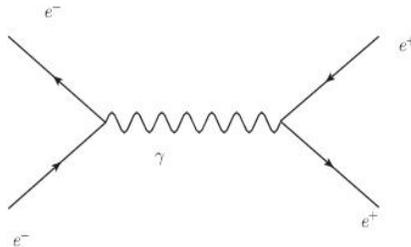
So gilt bei der elektromagnetischen Wechselwirkung: $\alpha_{el} = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$.

Für die schwache Wechselwirkung gilt: $\alpha_w = \frac{g_w^2}{4\pi} \approx \frac{1}{29}$, wobei der Index w hier für das englische Wort 'weak' steht.

Und für die starke Wechselwirkung gilt: $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \approx 0,12$, wobei der Index s hier das englische Wort 'strong' bezeichnet.

Beispiel A:

Das Feynman-Diagramm einer elastischen Elektron-Positron-Streuung sieht beispielsweise so aus:



Es handelt sich um eine elektromagnetische Wechselwirkung. Hierbei wird ein Photon ausgetauscht. Das Elektron emittiert ein Photon, welches von dem Positron absorbiert wird. Man spricht von einem virtuellen Photon, da generell Teilchen, die weder im Anfangs- noch im Endzustand auftreten, virtuelle Teilchen sind.

In dem Beispiel gibt es zwei Vertizes, an denen das Photon haftet; links an

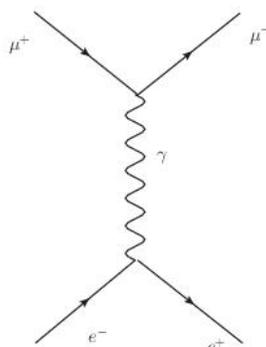
der Ladung des Elektrons und rechts an der des Positrons. An jedem dieser Vertizes enthält die Übergangsamplitude einen Faktor, welcher proportional zur Wurzel der Kopplungskonstanten ($\sqrt{\alpha}$) ist.

Für die Übergangsamplitude M gilt:

$$M \propto e^2 \propto \sqrt{\alpha_{el}} \cdot \sqrt{\alpha_{el}} = \alpha_{el}$$

Beispiel B:

Das zweite Beispiel beschreibt die Vernichtung eines Elektron-Positron-Paares:

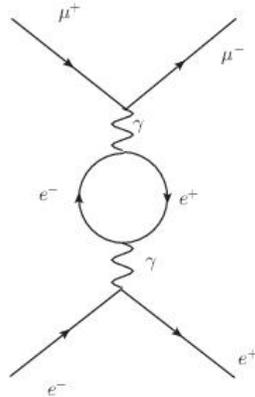


Auch hierbei handelt es sich um eine elektromagnetische Wechselwirkung. Das Photon zerfällt nach einiger Zeit in ein negativ geladenes Myon μ^- und in sein positiv geladenes Antiteilchen μ^+ . Für die Übergangsamplitude M gilt auch für dieses Beispiel:

$$M \propto e^2 \propto \sqrt{\alpha_{el}} \cdot \sqrt{\alpha_{el}} = \alpha_{el}$$

Beispiel C:

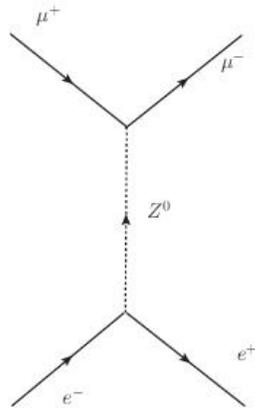
Dieses Beispiel beschreibt den gleichen Prozess wie bei Beispiel B, nur in einer komplizierteren Variante. Hier geht das Photon in ein e^+e^- -Paar als weiteren Zwischenzustand über. Es tragen noch weitere komplizierte Diagramme zu diesem Prozess bei. Diese Diagramme bezeichnet man als Diagramme höherer Ordnung.



Auch hierbei handelt es sich um eine elektromagnetische Wechselwirkung.
 Für die Übergangsamplitude M gilt nun:
 $M \propto e^4 \propto \sqrt{\alpha_{el}} \cdot \sqrt{\alpha_{el}} \cdot \sqrt{\alpha_{el}} \cdot \sqrt{\alpha_{el}} = \alpha_{el}^2$

Beispiel D:

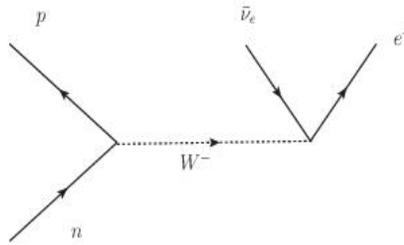
In Beispiel D sieht man die Paarerzeugung von Myonen. Hier wird ein neutrales schweres Vektorboson Z^0 ausgetauscht.



Es handelt sich um eine schwache Wechselwirkung.
 Für die Übergangsamplitude M gilt:
 $M \propto g_w^2 \propto \sqrt{\alpha_w} \cdot \sqrt{\alpha_w} = \alpha_w$

Beispiel E:

Das vierte Beispiel zeigt den β -Zerfall eines Neutrons. Das Neutron geht in ein Proton über und sendet dabei ein negativ geladenes Vektorboson W^- aus, welches nach kurzer Zeit in ein Elektron e^- und ein Elektron-Antineutrino $\bar{\nu}_e$ zerfällt.



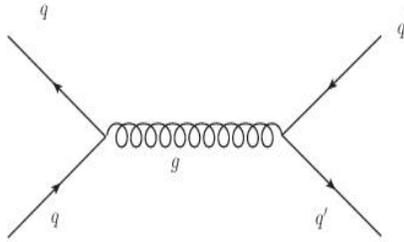
Es handelt sich ebenfalls um eine schwache Wechselwirkung.

Für die Übergangsamplitude M gilt:

$$M \propto g_w^2 \propto \sqrt{\alpha_w} \cdot \sqrt{\alpha_w} = \alpha_w$$

Beispiel F:

Im letzten Beispiel wird eine starke Wechselwirkung zwischen zwei Quarks q und q' gezeigt. Dabei wird ein Gluon ausgetauscht.



Für die Übergangsamplitude M gilt:

$$M \propto g_s^2 \propto \sqrt{\alpha_s} \cdot \sqrt{\alpha_s} = \alpha_s$$

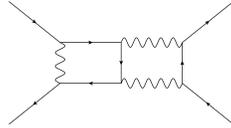
2.2.4 Anzahl der Schleifen (loop number)

Weiterhin kann man jedem Graphen eine Schleifenanzahl (loop number) zuordnen, die sich nach folgender Formel berechnen lässt:

$$l = n - r + k, \tag{2}$$

wobei n die Anzahl der Kanten, r die Anzahl der Vertizes und k die Anzahl der verbundenen Komponenten beschreibt.

Betrachtet man folgendes Beispiel zur Veranschaulichung:



Dieser Graph besitzt 7 Kanten, 6 Vertizes und eine verbundene Komponente. Somit ergibt sich nach Formel (2) für die Anzahl der Schleifen:

$$l = 7 - 6 + 1 = 2$$

Es handelt sich bei dem oben genannten Beispiel um einen Zwei-Schleifen-Graph (two-loop graph).

In der nachfolgenden Tabelle wurden Beispiele für Null-bis Zwei-Schleifen-Graphen anschaulich dargestellt:

0-Schleifen-Graph	1-Schleifen-Graph	2-Schleifen-Graph
$l = 1 - 2 + 1 = 0$	$l = 4 - 4 + 1 = 1$	$l = 7 - 6 + 1 = 2$

Es gibt natürlich auch Graphen mit mehr als zwei Schleifen. Je mehr Schleifen vorhanden sind, desto höher ist auch die Ordnung der Kopplungskonstanten des Graphen. Bei der Berechnung von Störungsreihen sind nur Terme bis zu einer bestimmten Ordnung relevant. Je genauer das Ergebnis allerdings ausfallen soll, desto mehr Ordnungen müssen betrachtet werden, d.h. der Rechenaufwand erhöht sich deutlich. Die Schleifen in den Feynman-Graphen können divergente Integrale liefern, welche mithilfe der Renormierung endlich gemacht werden müssen. Je mehr Schleifen also vorhanden sind, desto aufwändiger ist die Rechnung.

2.3 Renormierung

Das Renormierungsprogramm beruht auf einer Analyse der Feynman-Graphen. Es handelt sich hierbei um ein Verfahren, welches Divergenzen endlich macht. Es gibt verschiedene Methoden dieses Renormierungsprozesses. Da sich diese Bachelorarbeit jedoch nach der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie richtet, betrachtet man auch eine störungstheoretische Renormierung.

Die Hauptidee dieser Renormierung in der Quantenfeldtheorie erschien erstmals 1947 in einem Aufsatz von Bethe, welcher sich mit dem konkreten Problem des Selbstenergiebeitrags für die Lamb-Verschiebung in der perturbativen Quantenelektrodynamik (QED) beschäftigte.

Erst fünf Jahrzehnte nach Bethes Arbeit kam es mit der Einführung des Begriffes einer Hopf-Algebra durch Kreimer zu einem Wandel.

Connes und Kreimer erforschten diese neue Methode sowohl in Bezug auf den mathematischen Aspekt als auch auf physikalischen Hintergrund.

Der Hopf-algebraische Ansatz erfasst die kombinatorischen und algebraischen Aspekte des Renormierungsprozesses, indem sie die Feynman-Graphen in eine kombinatorische Hopf-Algebra einordnet. Bei dieser Hopf-Algebra handelt es sich um eine kommutative Algebra, welche im Wesentlichen durch ihr nicht kokommutatives Koproduct gekennzeichnet ist.

In diesem Renormierungsprozess ist es das Ziel, eine freie Pre-Lie-Algebra zu bilden, diese anschließend in eine Lie-Algebra zu wandeln, um abschließend die universelle Einhüllende zu bilden, welche die kokommutative Hopf-Algebra ist. Schließlich ist das Duale dieser kokommutativen Hopf-Algebra die kommutative Hopf-Algebra von Connes und Kreimer.

3 Mathematische Grundlagen

Nachdem nun die Theorie näher gebracht wurde, muss man außerdem ein paar grundlegende mathematische Begriffe kennenlernen, die in diesem Kapitel eingeführt werden.

Die nachfolgenden Definitionen wurden der Quelle [LIN10] entnommen.

3.1 Gruppe

Definition 1 (Gruppe)

Es sei G eine Menge und $*$ eine zweistellige Verknüpfung auf G . Dann heißt $(G, *)$ eine Gruppe, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

- (i) Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $a * (b * c) = (a * b) * c$. (Assoziativität)
- (ii) Es existiert ein Element $e \in G$, so dass für jedes $a \in G$ gilt: $a * e = a = e * a$. Das Element e heißt *neutrales Element*.
- (iii) Zu jedem $a \in G$ existiert ein Element $a^{-1} \in G$, so dass gilt: $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$
Das Element a^{-1} heißt *inverses Element zu a* oder *Inverses zu a* .

Eine Gruppe heißt *abelsch*, falls für alle $a, b \in G$ die Gleichheit: $a * b = b * a$ besteht.

Beispiel 1 (Gruppe)

- (a) Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} bilden zusammen mit der Addition eine (abelsche) Gruppe.
- (b) Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die reellen Zahlen \mathbb{R} bilden zusammen mit der Addition eine Gruppe.
- (c) Außerdem sind $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ebenfalls Gruppen.

3.2 Körper

Definition 2 (*Körper*)

Es sei K eine Menge mit einer additiven Verknüpfung $+$ und einer multiplikativen Verknüpfung \cdot . Dann heißt $(K, +, \cdot)$ ein *Körper*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0 .
- (ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 1 .
- (iii) Für alle $a, b, c \in K$ gelten die Distributivgesetze: $a \cdot (b + c)$ und $(a + b) \cdot c$

Beispiel 2 (*Körper*)

Beispiele für Körper sind

- (a) die Menge der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,
- (b) die Menge der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sowie
- (c) die Menge der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, jeweils mit der dazugehörigen Addition und Multiplikation.

3.3 Vektorraum

Definition 3 (*Vektorraum*)

Es sei K ein Körper und V eine Menge mit einer inneren Verknüpfung

$$\dot{+} : V \times V \rightarrow V, \quad (v, w) \mapsto v \dot{+} w, \quad (\text{Addition})$$

und einer äußeren Verknüpfung

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \quad (\text{skalare Multiplikation}).$$

Dann heißt V ein K -Vektorraum (oder Vektorraum über K), wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) V ist eine abelsche Gruppe zusammen mit der Addition.
- (ii) Für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$ muss die skalare Multiplikation mit

den anderen Verknüpfungen verträglich sein:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot v &= \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \\ \lambda \cdot (v + w) &= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w, \\ \lambda \cdot (\mu \cdot v) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot v \\ 1 \cdot v &= v.\end{aligned}$$

Beispiel 3 (Vektorraum)

- (a) Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}^n ist ein \mathbb{R} -Vektorraum für jedes $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Ist K ein Körper, so ist K^n für alle $n \in \mathbb{N}$ ein K -Vektorraum.

3.4 Algebra

Definition 4 (Algebra)

Es sei A ein K -Vektorraum. Dann heißt A K -Algebra (oder Algebra über K), wenn eine bilineare Verknüpfung existiert:

$$m : A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto m(a, b) =: a \cdot b.$$

Bilinearität bedeutet, dass für alle $x, y, z \in A$ und alle $\lambda \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}(x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z, \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z, \\ \lambda \odot (x \cdot y) &= (\lambda \odot x) \cdot y = x \cdot (\lambda \odot y).\end{aligned}$$

Beispiel 4 (Algebra)

- (a) Es gibt assoziative Algebren, für die in der Multiplikation das Assoziativgesetz gilt.
- (b) Bei kommutativen Algebren gilt in der Multiplikation das Kommutativgesetz.
- (c) Außerdem gibt es unitäre Algebren. Das sind Algebren mit einem neutralen Element der Multiplikation, dem Einselement.

4 Beispiele der Algebren

Nachdem im vorherigen Kapitel der Begriff einer Algebra klar gemacht wurde, werden in diesem Abschnitt die drei speziellen Algebren betrachtet, die benötigt werden, um die Renormierung durchzuführen: die Pre-Lie-Algebra, die Lie-Algebra und die Hopf-Algebra.

Wie bereits erwähnt, ist es das Ziel, eine freie Pre-Lie-Algebra zu bilden, diese anschließend in eine Lie-Algebra zu wandeln und abschließend die universelle Einhüllende zu bilden, welche die kokommutative Hopf-Algebra ist.

Im Folgenden werden nun die nächsten 3 Schritte ausführlich betrachtet.

- (1) Pre-Lie Algebra
- (2) Übergang Pre-Lie-Algebra \rightarrow Lie-Algebra
- (3) Übergang Lie-Algebra \rightarrow Hopf-Algebra

4.1 Pre-Lie-Algebra

Beginnt man zunächst mit der Pre-Lie-Algebra. Es werden hierfür 1PI Feynman-Graphen betrachtet (Vgl. Kapitel 2.2) und es soll im Folgenden gezeigt werden, dass diese Graphen eine natürliche Pre-Lie-Algebrastruktur besitzen. Um das Ganze zu veranschaulichen, muss erst einmal die Definition einer Pre-Lie-Algebra geklärt werden.

4.1.1 Definition einer Pre-Lie-Algebra

Eine Pre-Lie-Algebra ist ein Vektorraum ausgestattet mit einer bilinearen Verknüpfung $\cdot : V \times V \rightarrow V$, sodass für alle $A, B \in V$ gilt:

$$[L_A, L_B] = L_{[A, B]}$$

Hierbei bezeichnet L_A die linksseitige Multiplikation von A:

$$L_A B = A \cdot B$$

und $[L_A, L_B]$ ist der gewöhnliche kommutative Operator für den gilt:

$$[L_A, L_B] = L_A L_B - L_B L_A,$$

wobei $[A, B]$ der Kommutator ist, der durch die multiplikative Verknüpfung definiert ist zu:

$$[A, B] = A * B - B * A.$$

Definition 5 (*Pre-Lie-Algebra*)

Es sei V ein Vektorraum mit einer bilinearen Verknüpfung $\cdot : V \times V \rightarrow V$, dann heißt (V, \cdot) eine *Pre-Lie-Algebra*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist:

- Für alle $A, B, C \in V$ gilt

$$(A * B) * C - A * (B * C) = (A * C) * B - A * (C * B). \quad (3)$$

Beispiel 5 (*Pre-Lie-Algebra*)

(a) Jede assoziative Algebra ist eine *Pre-Lie-Algebra*.

4.1.2 Beispielrechnung einer *Pre-Lie-Algebra*

Im Folgenden soll anhand von Feynman-Graphen gezeigt werden, dass die *Pre-Lie*-Struktur (3)

$$(A * B) * C - A * (B * C) = (A * C) * B - A * (C * B)$$

erfüllt ist, wobei $A = \text{triangle with wavy lines}$, $B = \text{triangle with wavy lines}$ und $C = \text{wavy line}$ entsprechen.

Man kann zeigen, dass dieser Vorgang *Pre-Lie* ist und zwar indem man die Feynman-Graphen ineinander einklebt. Betrachtet man dazu das unten stehende Beispiel, sollte klar werden, wie dieser Vorgang funktioniert.

Betrachtet man zunächst den linken Term der Formel (3) :

$$(A * B) * C - A * (B * C) \quad (4)$$

Nach Einsetzen der Feynman-Graphen erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{triangle} * \text{triangle} \right) * \text{wavy} - \text{triangle} * \left(\text{triangle} * \text{wavy} \right) \\
 = & \left(\text{triangle} + \text{triangle} + \text{triangle} \right) * \text{wavy} - \text{triangle} * \left(\text{triangle} + \text{triangle} \right) \\
 = & \left(3 * \text{triangle} \right) * \text{wavy} - \text{triangle} * \left(2 * \text{triangle} \right) \\
 = & \left(6 * \text{triangle} + 6 * \text{triangle} + 3 * \text{triangle} \right) - \left(6 * \text{triangle} \right) \\
 = & 6 * \text{triangle} + 3 * \text{triangle}
 \end{aligned}$$

Betrachtet man anschließend den rechten Term der Formel (3):

$$\begin{aligned}
 & (A * C) * B - A * (C * B) \tag{5} \\
 = & \left(\text{triangle} * \text{wavy} \right) * \text{triangle} - \text{triangle} * \left(\text{wavy} * \text{triangle} \right) \\
 = & \left(\text{triangle} + \text{triangle} + \text{triangle} \right) * \text{triangle} - \text{triangle} * 0 \\
 = & \left(3 * \text{triangle} \right) * \text{triangle} - 0 \\
 = & \left(3 * \text{triangle} + 3 * \text{triangle} + 3 * \text{triangle} \right) \\
 = & 6 * \text{triangle} + 3 * \text{triangle}
 \end{aligned}$$

Nun kann man beide Lösungen der Terme einsetzen und erhält für (3):

$$6 * \text{triangle} + 3 * \text{triangle} = 6 * \text{triangle} + 3 * \text{triangle}$$

Es lässt sich feststellen, dass die gewählten Feynman-Graphen eine Pre-Lie-Struktur besitzen.

4.2 Lie-Algebra

Im zweiten Schritt soll nun klar gemacht werden, wie man eine Lie-Algebra erhält. Auch hierfür betrachtet man zunächst die Definition dieser Algebra, welche aus der Quelle [QGR01] stammt.

4.2.1 Definition einer Lie-Algebra

Definition 6 (*Lie-Algebra*)

Eine Lie-Algebra ist ein K -Vektorraum L mit einer bilinearen Operation

$$[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L,$$

der sogenannten **Lie-Klammer**, welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(1) (*Antisymmetrie*)

$$[A, B] = -[B, A] \text{ für alle } A, B \in L$$

(2) (*Jacobi Identität*)

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \text{ für alle } A, B, C \in L.$$

Beispiel 6 (*Lie-Algebra*)

- (a) Der Vektorraum \mathbb{R}^3 bildet eine Lie-Algebra.
- (b) Jede assoziative Algebra kann man zu einer Lie-Algebra machen, indem man als Lie-Klammer den Kommutator $[A, B] = A * B - B * A$ wählt.

Jede assoziative Algebra ist eine Pre-Lie-Algebra, allerdings gilt das nicht andersherum. Des Weiteren kann man jede assoziative Algebra zu einer Lie-Algebra machen. Es ist bekannt, wenn A eine assoziative Algebra ist, das die Antisymmetrie die Algebra A in eine Lie-Algebra wandeln kann. Das gilt außerdem für Pre-Lie-Algebren.

Im Folgenden wird nun gezeigt, wie sich die Jacobi Identität von der Pre-Lie-Struktur ableiten lässt.

Es wurde bereits gezeigt, dass diese Abbildung Pre-Lie ist:

$$(A * B) * C - A * (B * C) = (A * C) * B - A * (C * B).$$

Man kann zeigen, dass die Anti-Symmetrisierung dieser Operation die Jacobi Identität:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

erfüllt. Man erhält eine Lie-Algebra, wenn man diese Operation

$$[A, B] = A * B - B * A$$

anti-symmetrisiert.

Fasst man das Ganze mit einem Satz zusammen:

Satz 1

Mit

$$(A * B) * C - A * (B * C) = (A * C) * B - A * (C * B) \quad (6)$$

erfüllt

$$[A, B] := A * B - B * A \quad (7)$$

die Jacobi Identität

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0. \quad (8)$$

4.2.2 Beweis Satz 1

An dieser Stelle wird auf eine Beispielrechnung verzichtet und stattdessen der allgemeine Beweis von Satz 1 durchgeführt, um somit den Übergang einer Pre-Lie-Algebra in eine Lie-Algebra zu verdeutlichen.

Beweis:

Folgende Aussage soll bewiesen werden:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

Nachdem man (7) in (8) einsetzt, erhält man folgende Aussage:

$$\begin{aligned} & ((A * B - B * A) * C) - (C * (A * B - B * A)) \\ & + ((B * C - C * B) * A) - (A * (B * C - C * B)) \\ & + ((C * A - A * C) * B) - (B * (C * A - A * C)) = 0 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird nun ausgeklammert.

$$\begin{aligned} & (A * B) * C - (B * A) * C - C * (A * B) + C * (B * A) \\ & + (B * C) * A - (C * B) * A - A * (B * C) + A * (C * B) \\ & + (C * A) * B - (A * C) * B - B * (C * A) + B * (A * C) = 0 \end{aligned}$$

Anschließend kann man das Ganze umsortieren und erhält:

$$\begin{aligned} & (A * B) * C - A * (B * C) - (A * C) * B + A * (C * B) \\ & + (B * C) * A - B * (C * A) - (B * A) * C + B * (A * C) \\ & + (C * A) * B - C * (A * B) - (C * B) * A + C * (B * A) = 0 \end{aligned}$$

Mit (6) folgt, dass die Terme jeweils gleich sind und somit die Aussage bewiesen wurde. \square

Da die Klammer eine Jacobi Identität ausübt, erhält man eine graduierte Lie-Algebra.

4.3 Hopf-Algebra

Um den Begriff der Hopf-Algebra zu verstehen, müssen zunächst die Begriffe einer Bialgebra und einer Antipode geklärt werden.

Um allerdings den Begriff einer Bialgebra nachvollziehen zu können, muss vorerst die Koalgebra verdeutlicht werden.

Die Definitionen und Sätze in diesem Kapitel stammen alle aus [QGR01].

4.3.1 Grundlagen einer Hopf-Algebra

Definition 7 (Koalgebra)

Es sei C ein K -Vektorraum mit zwei linearen Abbildungen

$$\Delta : C \rightarrow C \otimes C \quad (\text{Koprodukt})$$

und

$$\epsilon : C \rightarrow K \quad (\text{Koeins}).$$

Dann heißt (C, Δ, ϵ) Koalgebra, wenn die folgendenen Axiome (Koassoziativität) und (Koeins) erfüllt sind:

(i) Koassoziativität: $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$

Das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \downarrow \Delta & & \downarrow id \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes id} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

kommutiert.

(ii) Koeins: $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta$

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C & \xleftarrow{id \otimes \Delta} & C \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \epsilon} & A \\ & \searrow \cong & \uparrow \Delta & \swarrow \cong & \\ & & C & & \end{array}$$

kommutiert.

Die Abbildung Δ wird das *Koprodukt* oder *Komultiplikation* genannt, während ϵ als die *Koeins* der *Koalgebra* bezeichnet wird. Die Diagramme (i) und (ii) bringen zum Ausdruck, dass das Koprodukt koassoziativ und kouniversitär ist.

Des Weiteren kommutiert auch das Dreieck (*Koverbindung*):

$$\begin{array}{ccc}
 C & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\tau_{C,C}} & C \otimes C
 \end{array}$$

Hier vertauscht das $\tau_{C,C}$ die beiden C 's und die Koalgebra ist somit kokommutativ.

Nun lässt sich auch die Bialgebra definieren. Allerdings muss man sich hierfür vorher den Begriff des Tensorprodukts verdeutlichen.

Definition 8 (*Tensorprodukt*)

Es seien V und W K -Vektorräume. Das Tensorprodukt ist gegeben durch einen K -Vektorraum $V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft:

Zu jeder bilinearen Abbildung

$$\xi : V \times W \rightarrow U$$

in einem K -Vektorraum U gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\xi' : V \otimes W \rightarrow U \quad \text{mit } \xi = \xi' \circ \eta.$$

Definition 9 (*Tensoralgebra*)

Es sei V ein K -Vektorraum, dann ist die Tensoralgebra definiert durch die direkte Summe aller Tensorprodukte des Raumes mit sich selber.

$$TV = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n} = K \otimes V \otimes (V \otimes V) \otimes (V \otimes V \otimes V) \otimes \dots$$

Satz 2

Sei H ein Vektorraum mit sowohl einer Algebrastruktur (H, μ, η) und einer Koalgebrastruktur (H, Δ, ε) . $H \otimes H$ bezeichnet sowohl die induzierte Struktur eines Tensorprodukts einer Algebra als auch die einer Koalgebra. Die folgenden zwei Aussagen sind identisch.

- (1) Die Abbildungen μ und η sind Morphismen von Koalgebren.
- (2) Die Abbildungen Δ und ε sind Morphismen von Algebren.

Definition 10 (*Bialgebra*)

Es sei H ein Vektorraum mit sowohl einer Algebrastruktur (H, μ, η) und einer Koalgebrastruktur (H, Δ, ε) . $H \otimes H$ bezeichnet sowohl die induzierte Struktur eines Tensorprodukts einer Algebra als auch die einer Koalgebra. Dann ist $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ eine Koalgebra, bei der (H, μ, η) und (H, Δ, ε) die gleichen Bedingungen aus Satz 2 überprüfen. Ein Morphismus einer Bialgebra ist auch ein Morphismus der zugrundeliegenden Algebra- und Koalgebrastrukturen.

Definition 11 (*Antipode*)

Es sei $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ eine Bialgebra. Ein Endomorphismus S auf H heißt Antipode der Bialgebra H , wenn folgende Aussage gilt:

- (i) $S \star id_H = id_H \star S = \eta \circ \varepsilon$.

Da nun der Begriff einer Bialgebra und der einer Antipode bekannt ist, kann man nun den Begriff der Hopf-Algebra einführen.

Definition 12 (*Hopf-Algebra*)

Eine Hopf-Algebra ist eine Bialgebra mit einer Antipode. Ein Morphismus von Hopf-Algebren ist ein Morphismus zwischen der zugrunde liegenden Bialgebra mit der Antipode.

Beispiel 7 (*Hopf-Algebra*)

- (a) Eine Gruppenalgebra ist eine Hopf-Algebra.
- (b) Die universelle einhüllende Algebra einer Lie-Algebra ist eine Hopf-Algebra.

Nachdem nun alle relevanten Begriffe definiert wurden, betrachtet man zunächst den letzten Schritt und zwar den Übergang der Lie-Algebra zur Hopf-Algebra. Auch hier gibt es wieder ein nützliches Theorem, das sogenannte Milnor-Moore-Theorem.

Satz 3 (Milnor-Moore-Theorem (vereinfachte Form))

Das Duale einer universellen Einhüllenden einer graduierten Lie-Algebra ist eine Hopf-Algebra.

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass man eine graduierte Lie-Algebra erhält. Die universelle einhüllende Algebra $U(L)$ wird durch die Tensoralgebra aufgebaut

$$\mathbf{T} = \bigoplus_k T^k, \quad T^k = \underbrace{L \otimes \dots \otimes L}_{k \text{ mal}}$$

durch Herausteilen des Ideals, welches durch folgenden Ausdruck beschrieben wird

$$A \otimes B - B \otimes A = [A, B] \in L.$$

Die universelle einhüllende Algebra $U(L)$ einer Lie-Algebra enthält eine natürliche Hopf-Algebrastruktur mit dem natürlichen Verkettungsprodukt μ_* . Die Lie-Algebra L hingegen liefert die primitiven Elemente:

$$\Delta_*(A) = A \otimes 1 + 1 \otimes A, \quad \text{für alle } A \in L.$$

Dies ist eine graduierte Hopf-Algebra, die kokommutativ aber nicht kommutativ ist.

Nun kann man sich das graduierte Ideal überlegen, welches einer Hopf-Algebra $H(\mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ entspricht, die kommutativ aber nicht kokommutativ ist.

Hierfür betrachtet man das Koprodukt Δ unter Verwendung der Kronecker Paarung

$$\langle \delta_\Gamma, l_{\Gamma'} \rangle$$

Auf der linken Seite steht das δ für die Hopf-Algebra und auf der rechten Seite der Klammer entspricht l die Lie-Algebra. Des Weiteren stehen Γ und

Γ' für zwei verschiedene Graphen. Die Hopf-Algebra H und die Lie-Algebra L gehen über in die rationalen Zahlen. $H \otimes L \rightarrow \mathbb{Q}$
 Abkürzend kann das Kronecker-Delta, wie folgt geschrieben werden

$$\delta_{\Gamma, \Gamma'} := \langle \Gamma, \Gamma' \rangle = \begin{cases} 1, & \Gamma = \Gamma' \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9)$$

Das bedeutet, man müsste für zwei unterschiedliche Graphen Null erhalten und für den Fall, dass beide Graphen identisch sind, erhält man Eins.

Dies wird anschließend in einer Beispielrechnung gezeigt.

Dafür benötigt man noch die abschließende Formel, welche man erhält, indem man die bekannten Ausdrücke einer Hopf- und einer Lie-Algebra in (9) einsetzt

$$\langle \Gamma, \Gamma' \rangle = \left\langle \overbrace{\Gamma}^H, \overbrace{[l_1, l_2]}^L \right\rangle = \left\langle \overbrace{\Delta \Gamma}^{H \otimes H}, \overbrace{l_2 \otimes l_1 - l_1 \otimes l_2}^{L \otimes L} \right\rangle, \quad (10)$$

wobei für das Koproduct einer Hopf-Algebra $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$ folgende Formel gilt

$$\Delta(\Gamma) = \Gamma \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subsetneq \Gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma. \quad (11)$$

4.3.2 Beispielrechnung einer Hopf-Algebra

An dieser Stelle soll das Kronecker Paar mithilfe von Feynman-Graphen berechnet werden.

Man weiß nun aus dem vorherigen Abschnitt, dass das Kronecker Paar bei zwei identischen Graphen Eins betragen muss (Vgl. (9)). Des Weiteren sind auch die Formeln zur Berechnung bekannt (Vgl. (10) und (11)).

Für das folgende Beispiel wurden die Feynman-Graphen beliebig gewählt. Man nehme

$$\Gamma = \Gamma' = \text{Diagramm eines Dreiecks mit einer Wavy-Linie an der linken Seite und zwei geraden Linien an den anderen Seiten. Innerhalb des Dreiecks befinden sich zwei Kreise, die durch Linien verbunden sind. Die Wavy-Linie ist an der linken Seite angeschlossen, die anderen beiden an der rechten Seite.$$

Es soll gezeigt werden, dass

$$\left\langle \text{Diagramm 1}, \text{Diagramm 2} \right\rangle = 1$$

gilt.

Mit (10) gilt:

$$\left\langle \left(\text{triangle with wavy line and circle} \right), \left(\text{triangle with wavy line and circle} \right) \right\rangle = \left\langle \Delta \left(\text{triangle with wavy line and circle} \right), \left[\text{triangle with wavy line and circle}, \text{circle with wavy line} \right] \right\rangle \quad (12)$$

Für das Koproduct gilt nach (11):

$$\Delta \left(\text{triangle with wavy line and circle} \right) = \text{triangle with wavy line and circle} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \text{triangle with wavy line and circle} + \text{circle with wavy line} \otimes \text{triangle with wavy line and circle}. \quad (13)$$

und für die Lie-Klammer gilt:

$$\left[\text{triangle with wavy line and circle}, \text{circle with wavy line} \right] = \text{circle with wavy line} \otimes \text{triangle with wavy line and circle} - \text{triangle with wavy line and circle} \otimes \text{circle with wavy line} \quad (14)$$

Setzt man nun die Ausdrücke des Koproducts (13) und der Lie-Klammer (14) in die Ausgangsformel (12) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} & \left\langle \Delta \left(\text{triangle with wavy line and circle} \right), \left[\text{triangle with wavy line and circle}, \text{circle with wavy line} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \text{triangle with wavy line and circle} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \text{triangle with wavy line and circle} + \text{circle with wavy line} \otimes \text{triangle with wavy line and circle}, \text{circle with wavy line} \otimes \text{triangle with wavy line and circle} - \text{triangle with wavy line and circle} \otimes \text{circle with wavy line} \right\rangle \end{aligned}$$

Um das Kronecker Paar nun zu berechnen, muss man jeden Term des Koproducts jeweils mit dem Term der Lie-Klammer verbinden und erhält:

$$\begin{aligned} &= \left\langle \text{triangle with wavy line and circle} \otimes \mathbb{I}, \text{circle with wavy line} \otimes \text{triangle with wavy line and circle} \right\rangle - \left\langle \text{triangle with wavy line and circle} \otimes \mathbb{I}, \text{triangle with wavy line and circle} \otimes \text{circle with wavy line} \right\rangle \\ & \quad \left\langle \mathbb{I} \otimes \text{triangle with wavy line and circle}, \text{circle with wavy line} \otimes \text{triangle with wavy line and circle} \right\rangle - \left\langle \mathbb{I} \otimes \text{triangle with wavy line and circle}, \text{triangle with wavy line and circle} \otimes \text{circle with wavy line} \right\rangle \\ & \quad \left\langle \text{circle with wavy line} \otimes \text{triangle with wavy line and circle}, \text{circle with wavy line} \otimes \text{triangle with wavy line and circle} \right\rangle - \left\langle \text{circle with wavy line} \otimes \text{triangle with wavy line and circle}, \text{triangle with wavy line and circle} \otimes \text{circle with wavy line} \right\rangle \end{aligned}$$

Anschließend werden die jeweils ersten Terme eines Kronecker Paares mit den jeweils hinteren Termen verknüpft. Das sieht dann so aus:

$$\begin{aligned}
 &= \langle \text{triangle with circle}, \text{circle} \rangle \otimes \langle \text{I, triangle} \rangle - \langle \text{triangle with circle}, \text{triangle} \rangle \otimes \langle \text{I, circle} \rangle \\
 &\quad \langle \text{I, circle} \rangle \otimes \langle \text{triangle with circle}, \text{triangle} \rangle - \langle \text{I, triangle} \rangle \otimes \langle \text{triangle with circle}, \text{circle} \rangle \\
 &\quad \langle \text{circle}, \text{circle} \rangle \otimes \langle \text{triangle with circle}, \text{triangle} \rangle - \langle \text{circle}, \text{triangle} \rangle \otimes \langle \text{triangle with circle}, \text{circle} \rangle
 \end{aligned}$$

Fast alle Kronecker Paare liefern die Lösung Null. Übrig bleibt:

$$\begin{aligned}
 &= \langle \text{circle}, \text{circle} \rangle \otimes \langle \text{triangle with circle}, \text{triangle} \rangle \\
 &= 1 \otimes 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, das man für das gewählte Beispiel die richtige Lösung erhält.

5 Des Märchens schöner Schluss

In den vorherigen Kapiteln wurde ausführlich gezeigt, wie man eine Hopf-Algebra erhält, welche aus kombinatorischen Elementen, den Feynman-Graphen, aufgebaut ist. Damit ist der Renormierungsprozess jedoch noch nicht abgeschlossen. Im Nachfolgenden soll nun kurz das Ende erklärt werden. Ich weise an dieser Stelle darauf hin, dass dies nicht in ausführlicher Form beschrieben wird und man daher einige Regeln als vorausgesetzt betrachtet. Diese Bachelorarbeit legt ihren Fokus an anderer Stelle, jedoch soll des Märchens schöner Schluss nicht verschwiegen bleiben.

In der Physik gibt es Abbildungen Φ von $H \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Phi(h_1, h_2) = \Phi(h_1)\Phi(h_2)$. $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ hat eine Gruppenstruktur aus der Hopf-Algebrastruktur :

$$\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

$$(\phi_1 * \phi_2) \equiv m_{\mathbb{C}}(\phi_1 \otimes \phi_2)\Delta \quad \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

$$(\phi_1 \cdot S) * \phi_1 = \phi_1 * (\phi_1 \cdot S) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$$

$$\phi_1 * \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} * \phi_1 = \phi_1$$

$$\mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \phi_1 \cdot \hat{\mathbf{1}},$$

wobei $\hat{\mathbf{1}}$ die Koeins der Hopf-Algebra entspricht.

Das Feynman-Integral für einen Graphen $\Gamma : \Gamma \rightarrow \Phi(\Gamma)$, hat dieselben Probleme, wie zum Beispiel das Integral:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x},$$

welches für große x-Werte divergiert. Dieses Integral wird endlich, wenn man seine Werte bei a und \tilde{a} miteinander vergleicht:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_{\tilde{a}}^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$= \int_a^{\tilde{a}} \frac{dx}{x} = \ln \frac{\tilde{a}}{a}$$

Die Lösung hierfür liefert die Hopf-Algebra. Diese besteht aus einem Ko-Produkt, einer Koinversen (Antipode) etc., wie bereits im vierten Kapitel eingeführt.

Man führt zunächst Renormierungsbedingungen ein, die $(p_i, m) \hat{=} a$ nach

$$\Phi(\Gamma) \equiv \Phi(\Gamma)(p_i, m)$$

und $(\tilde{p}_i, m) \hat{=} b$ überführen:

$$\Phi_0(\Gamma) \equiv \Phi(\Gamma)(\tilde{p}_i, m).$$

Es gibt eine renormierte Feynman-Regel, die besagt:

$$\Phi_R(\Gamma) \equiv m_{\mathbb{C}} \circ (\Phi_0 \circ S \otimes \Phi) \circ \Delta(\Gamma) \quad (15)$$

Man wähle als Graphen: $\Gamma = \text{wavy triangle}$.

Mit (15) erhält man:

$$\Phi_R(\text{wavy triangle}) \equiv m_{\mathbb{C}} \circ (\Phi_0 \circ S \otimes \Phi) \circ \Delta(\text{wavy triangle}). \quad (16)$$

Aus Kapitel 4.3.1 kennt man die Formel für das Ko-Produkt. Mit (11) gilt für unser Beispiel:

$$\Delta(\text{wavy triangle}) = \text{wavy triangle} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \text{wavy triangle}$$

Setzt man den Ausdruck für das Ko-Produkt nun in (16) ein, erhält man:

$$= m_{\mathbb{C}} \circ (\Phi_0 \circ S(\text{wavy triangle}) \otimes \Phi(\mathbb{I}) + m_{\mathbb{C}} \circ (\Phi_0 \circ S(\mathbb{I}) \otimes \Phi(\text{wavy triangle})) \quad (17)$$

Es gilt außerdem:

$$\Phi(\mathbb{I}) \equiv \Phi_0(\mathbb{I}) \equiv 1$$

und für die Antipoden

$$S(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \quad \text{und} \quad S(\text{triangle with wavy line}) = -\text{triangle with wavy line}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (17) ein, so erhält man nun:

$$= m_{\mathbb{C}} \circ (-\Phi_0(\text{triangle with wavy line})) \cdot 1 + m_{\mathbb{C}} \circ (1 \cdot \Phi(\text{triangle with wavy line})) \quad (18)$$

$$= m_{\mathbb{C}} \circ (\Phi(\text{triangle with wavy line}) - \Phi_0(\text{triangle with wavy line}))$$

$$= \Phi(\text{triangle with wavy line})(p_i, m) - \Phi(\text{triangle with wavy line})(\tilde{p}_i, m)$$

$$= \Phi_R(\text{triangle with wavy line}),$$

in völliger Analogie mit

$$\int_a^{\tilde{a}} \frac{dx}{x}.$$

6 Zusammenfassung

Dieser Bachelorarbeit liegt der Renormierungsprozess nach Connes und Kreimer zugrunde. Hauptaugenmerk wurde hierbei auf die Algebren der Feynman-Graphen gelegt und das Ende des Renormierungsprozesses wurde abschließend im letzten Kapitel lediglich kurz zusammengefasst.

Ziel dieser Arbeit war es den Weg zur Hopf-Algebra anhand von Beispielen deutlich zu machen. Dafür wurden sowohl bei der Beschreibung der Feynman-Graphen in Kapitel 2, sowie bei den Übergängen der Algebren im vierten Kapitel Wert darauf gelegt, die Problematik möglichst anschaulich zu gestalten.

Dem Leser sollte dieses komplexe Thema anhand von Beispielen näher gebracht werden.

Literatur

- [RQT67] James D. Bjorken/ Sidney D. Drell, Relativistische Quantenfeldtheorie, B I-Hochschultaschenbücher, Mannheim 1967
- [RQM98] James D. Bjorken/ Sidney D. Drell, Relativistische Quantenmechanik, Spektrum Akademischer Verlag GmbH , Heidelberg Berlin 1998
- [IQT95] Michael E. Peskin/ Daniel V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Westview Press 1995
- [QFT93] Franz Mandl/ Graham Shaw, Quantenfeldtheorie, AULA-Verlag, Wiesbaden 1. Auflage 1993
- [REN93] Laurie M. Brown, Renormalization: From Lorentz to Landau (and Beyond), Springer-Verlag, New York Inc. 1993
- [KFD00] Dirk Kreimer, Knots and Feynman Diagrams, Cambridge University Press 2000
- [TUK09] Povh/ Rith/ Scholz/ Zetsche, Teilchen und Kerne, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 8. Auflage 2009
- [LIN10] Gerd Fischer, Lineare Algebra, Vieweg+Teubner, 17. Auflage 2010
- [QGR95] Christian Kassel, Quantum Groups, Springer-Verlag, New York 1995
- [KRE05] Kurusch Ebrahimi-Fard/Dirk Kreimer, The Hopf algebra approach to Feynman diagram calculations, J. Phys. A **38** (2005) R385
<http://arxiv.org/pdf/hep-th/0510202v2.pdf>

- [FGR13] Stefan Weinzierl, Feynman Graphs, 2013,
<http://arxiv.org/abs/1301.6918v1>
- [RES13] Christian Käding, Renormierung eines Spielzeugmodells, Bachelorarbeit 2013,
http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~kreimer/wp-content/uploads/Kaeding_BA.pdf
- [DSG11] Bettina Johanna Grauel, Dyson-Schwinger Gleichungen und die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen - Eine Einführung, Bachelorarbeit 2011,
<http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~kreimer/wp-content/uploads/grauel.pdf>
- [NOT14] Dirk Kreimer, persönliche Notizen und Gespräch
- [LAB14] <http://ncatlab.org/nlab/show/pre-Lie+algebra>, 18.03.2014, 10:48
- [MPG14] Matilde Macolli, Renormalisierung als Galois-Symmetrie, Forschungsbericht 2006, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn,
<http://www.mpg.de/325007/forschungsSchwerpunkt1?c=166478>,
25.04.2014, 16:23

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden.

Berlin, den 22. Mai 2014

Danksagungen

Einen ganz besonderen Dank möchte ich in erster Linie an meinen Betreuer, Herrn Prof. Dr. Dirk Kreimer, für seine ausgiebige Unterstützung richten. Er stand nicht nur für aufschlussreiche und unterhaltsame Gespräche zur Verfügung, sondern schaffte es auch, mich stets zu motivieren. Vielen Dank an dieser Stelle für die Zeit und Mühen.

Des Weiteren dank ich meiner Mama für das Korrekturlesen. Sie äußerte Verbesserungsvorschläge und konnte als Fachfremde zeigen, wo noch Erklärungsbedarf bestand.

Außerdem möchte ich mich, bei meiner Familie und meinem Partner dafür bedanken, dass sie mich während meines Studiums immer unterstützen.

Zu guter Letzt sei den vielen Autoren hilfreicher Literatur gedankt.