Prof. Klaus Mohnke
Viktor Fromm, Ph.D.
Dr. Josua Groeger
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 11

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 27.6.2012

Beweisen Sie bei den unten stehenden Aufgaben 1 und 2 jeweils, dass das von Ihnen konstruierte Objekt die geforderten Eigenschaften besitzt. Diskutieren Sie die Existenz sowie die Anzahl der möglichen Lösungen. Kongruente Objekte werden dabei als dieselbe Lösung betrachtet.

Aufgabe 1.
(i) Wie lautet der Sekanten-Tangenten Satz?
(ii) Auf einem Blatt Papier seien ein Kreisbogen mit den Endpunkten B und C sowie ein dritter Punkt A gegeben, so dass B auf AC liegt. Konstruieren Sie auf dem Blatt mit Zirkel und Lineal eine Tangente an den Kreisbogen, die durch den Punkt A geht. Sie dürfen dabei nicht den Mittelpunkt des Kreises benutzen (der vielleicht nicht auf dem Blatt liegen mag).

Aufgabe 2.
Es schneide im Dreieck $\Delta(A, B, C)$ eine zu AC parallele Gerade die Seiten AB und BC in M bzw. N derart, dass $AM \cong BN$. Berechnen Sie die Länge der Strecke MN in Abhängigkeit der drei Seitenlängen $a := |BC|, b := |AC|$ und $c := |AB|$.

Aufgabe 3.
(i) Beweisen Sie den Ähnlichkeitssatz (SSS): Gilt für zwei Dreicke $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C')$ die Gleichheit $|AB| : |A'B'| = |AC| : |A'C'| = |BC| : |B'C'|$, dann sind $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C')$ ähnlich. Sie können das Kongruenzkriterium (SSS) sowie die in der Vorlesung bewiesenen Ähnlichkeitssätze benutzen.
(ii) Es seien P, Q und R die jeweiligen Mittelpunkte der Seiten BC, AC bzw. AB eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$. Beweisen Sie die Kongruenz $\measuredangle(ABC) \cong \measuredangle(PQR)$.

Aufgabe 4.
Sei $\Delta(A, B, C)$ ein gleichseitiges Dreieck. Seien P, Q die Mittelpunkte der Seiten BC bzw. AC. Seien S, T die Schnittpunkte der Geraden durch P und Q mit dem Umkreis des Dreiecks, wobei $Q \in PS$ und $P \in QT$. Fertigen Sie eine Skizze an. Beweisen Sie, dass der Punkt P die Strecke QT im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt, d.h. $|QP| : |QT| = |PT| : |QP|$.

Hinweis: Benutzen Sie den Sehnensatz. Aus Symmetriegründen gilt $|PS| = |QT|$. Dies brauchen Sie nicht zu beweisen.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden.

- Gegeben seien zwei Punkte und ein Kreis, der einen von ihnen enthält. Konstruieren Sie einen Kreis, der beide Punkte enthält und der tangential an den gegebenen Kreis ist (mit ihm also genau einen gemeinsamen Punkt hat).
- Gegeben seien ein Winkel, seine Winkelhalbierende, ein Punkt auf dieser sowie zwei Strecken, deren Längen sich wie $m : n$ verhalten. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal eine Gerade durch den gegebenen Punkt, so dass ihr im Inneren des Winkels liegender Teil durch den Punkt im Verhältnis $m : n$ geteilt wird.
- Seien $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C')$ zwei Dreiecke mit $\measuredangle(ABC) \cong \measuredangle(A'B'C')$. Es seien D bzw. D' Schnittpunkte mit AC bzw. mit $A'C'$ der Winkelhabierenden von $\measuredangle(ABC)$ und $\measuredangle(A'B'C')$. Zeigen Sie: Gilt $|AD| : |DC| = |A'D'| : |D'C'|$, dann sind die Dreiecke $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C')$ ähnlich.
- Zeigen Sie mithilfe des Sehnensatzes: Ist in einem Dreieck $\Delta(A, B, C)$ der Winkel $\measuredangle(ABC)$ ein Rechter und bezeichnet $P \in AC$ den Fußpunkt des Lotes von B auf AC, dann gilt $|AP| : |BP| = |BP| : |CP|$.