Prof. Klaus Mohnke
Viktor Fromm, Ph.D.
Dr. Josua Groeger
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 2.5.2012

Aufgabe 1.
Weisen die die Gültigkeit für Paschs Axiom in $\mathbb{H}$ für den Fall nach, dass die Gerade von der Form $k_{m,r}$ ist, eine der Seiten des Dreiecks ABC jedoch auf einer Geraden der Form h_c liegt.

Aufgabe 2.
Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Definition von Geraden und Anordnung. Zur Erinnerung: Dann gelten die Axiome der Inzidenz und Anordnung. Für zwei Punkte $A = (A_1, A_2)$ und $B = (B_1, B_2)$ definieren wir die Funktion

$$d(A, B) := |A_1 - B_1| + |A_2 - B_2|$$

und nennen zwei Strecken AB und CD kongruent (d.h. $AB \cong CD$) genau dann wenn $d(A, B) = d(C, D)$. Beweisen Sie in diesem Kontext die Axiome der Kongruenz für Strecken.

Aufgabe 3.
Für eine Geometrie gelten die Axiome der Inzidenz, der Anordnung und der Kongruenz von Strecken. Zeigen Sie, dass für drei Punkte, A, B, C mit $B \in AC$ und drei Punkte A', B', C' mit $B' \in A'C'$ gilt: Ist $AB \cong A'B'$ sowie $AC \cong A'C'$, so ist auch $BC \cong B'C'$.

Aufgabe 4.
Gegeben sei eine Gerade g mit einem Punkt $O \in g$. In der Vorlesung wurde durch Streckenabtragung eine binäre Operation $A, B \in g \mapsto A + B \in g$ definiert und teilweise bewiesen, dass dies eine abelsche Gruppe definiert. Für beliebige $A, B, C \in g$ gilt $(A+B)+C = A+(B+C)$. Wieviele Fälle gibt es für den Beweis dieser Aussage zu untersuchen (Lagebeziehungen der Punkte O, A, B, C)? In der Vorlesung wurde der Fall bewiesen, dass A, B, C auf einer Seite von O liegen. Führen Sie den Nachweis für mindestens einen weiteren Fall.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden.

- Gegeben sei eine Gerade g im Lobatschevsky-Modell der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ (ein Halbkreis $k_{m,r}$ bzw. eine Halbgerade h_c) sowie ein Punkt $P = (p_1, p_2) \notin g$. Bestimmen Sie alle zu g parallelen Geraden in diesem Modell, die durch P verlaufen.
- Weisen die die Gültigkeit für Paschs Axiom in $\mathbb{H}$ nach, falls die Gerade der Form h_c ist.
- $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Definition von Geraden und Anordnung sowie die durch den Euklidschen Abstandsfunktion definierte Kongruenz von Strecken erfüllt die Axiome der Kongruenz für Strecken.
- Die analoge Aussage für $\mathbb{Q}^2$ gilt nicht. Genauer: Das erste Kongruenzaxiom ist verletzt.
- Zeigen Sie für die in Aufgabe 3 beschriebene Operation auf einer Geraden g mit ausgezeichnetem Punkt O:
  - Das Inverse zu einem Punkt $A \in g$ erhält man, indem man die Strecke OA an O auf die Seite von O abträgt, die A nicht enthält. Es wird mit $-A$ bezeichnet.
  - Für zwei Punkte $A, B \in g$ mit $O \in AB$ gilt: $A + B = B + A$.