Prof. Klaus Mohnke
Viktor Fromm, Ph.D.
Dr. Josua Groeger
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 9.5.2012

Aufgabe 1
Wir betrachten Geraden und Kreise im $\mathbb{R}^2$, die durch Gleichungen wie in der ersten Aufgabe auf der Rückseite gegeben sind.
(a) Geben Sie die Gleichung für die Gerade an, die durch die beiden Schnittpunkte zweier sich schneidender (und nicht berührender) Kreise verläuft. Die Lösung soll aus den Parametern der Gleichungen dieser Kreise bestimmt werden.
(b) Beweisen Sie: Die drei in (a) bestimmten Geraden dreier sich schneidender und nicht berührender Kreise, die durch je ein Paar aus diesen bestimmt werden, schneiden sich in einem Punkt. Fertigen Sie dazu auch eine Zeichnung an.

Aufgabe 2
Wir betrachten eine Menge von Punkten mit Geraden (bestimmte Teilmengen), so dass die Axiome der Inzidenz, Anordnung und Kongruenz (für Strecken sowie Winkel) erfüllt sind. Seien A und B zwei verschiedene Punkte. Zeigen Sie: Es existiert ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit der Eigenschaft $AC \cong BC$ (solche Dreiecke heißen gleichschenklig).

Aufgabe 3
Wir betrachten eine Geometrie wie in Aufgabe 2.
(a) Beweisen Sie: Zu jedem Winkel $\angle(ABC)$ existiert eine Winkelhalbierende.
<u>Hinweis:</u> Ein Lösungsweg benutzt die Aussage von Aufgabe 2.
(b) Zeigen Sie: Die Winkelhalbierende eines Winkels bildet mit der Winkelhalbierenden seines Nebenwinkels einen rechten Winkel. Hier soll wieder nicht mit dem Rechnen mit Winkelmaßen argumentiert werden, sondern mit den in der Vorlesung verwendeten Begriffen und Tatsachen.

Aufgabe 4
In der Vorlesung wurde behauptet, dass man einen rechten Winkel wie folgt konstruieren kann. Auf einer Geraden g durch zwei Punkte A und D sei in A ein weiterer Strahl gegeben, der mit dem Strahl in A durch D einen beliebigen Winkel bildet. Auf ihm sei ein Punkt B gegeben. Man trage diesen Winkel nach der anderen Seite von g in A ab. Auf dem neuen Strahl sei C der Punkt mit $AC \equiv AB$.
Zeigen Sie nun: Die Gerade h durch B und C schneidet g in genau einem Punkt O. Je ein Strahl in O auf h bzw. k bilden einen rechten Winkel.
<u>Hinweis:</u> O kann verschieden bezüglich A liegen (Fallunterscheidung).

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden.

- Geben Sie die allgemeinen Gleichungen für eine Gerade und die für einen Kreis in $\mathbb{R}^2$ an. Was bedeuten die Parameter geometrisch? Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Geraden (die durch ihre Gleichungen gegeben sind), die Schnittpunkte zweier Kreise sowie die Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden in Abhängigkeit der Parameter der Gleichungen.

  Benutzen Sie für die folgenden Aufgaben nur die Begriffe, Axiome und Sätze der Vorlesung und beispielsweise nicht Ihre Schulkenntnisse über das Rechnen mit Winkelmaßen.

- Seien h und h' zwei entgegengesetzte Strahlen auf einer Geraden. Seien k und l zwei Strahlen auf verschiedenen Seiten dieser Geraden, so dass $\angle(h,k) \equiv \angle(h',l)$. Zeigen Sie, dass dann k und l entgegengesezte Strahlen auf einer Geraden sind.

- Definieren Sie mithilfe der in der Vorlesungen eingeführten Begriffe, was eine Winkelhalbierende ist.

- Seien h, k, l und m vier Strahlen in einer Ebene in einem Punkte O. Seien $\angle(k,l)$ und $\angle(h,m)$ rechte Winkel. Zeigen Sie, dass die Winkelhalbierenden der beiden Winkel $\angle(h,k)$ und $\angle(l,m)$ entgegengesetzte Strahlen auf einer Geraden sind.