Prof. Klaus Mohnke
Viktor Fromm, Ph.D.
Dr. Josua Groeger
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 8

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 6.6.2012

Wenn nicht anders angegeben, betrachten wir im folgenden jeweils eine Geometrie, in der die Axiome der Inzidenz, Anordnung und Kongruenz sowie das Parallelenaxiom gelten.

Aufgabe 1.
Seien $A \neq B$ zwei Punkte und g eine Gerade, die durch B aber nicht durch A verläuft. Konstruieren Sie einen Kreis, der durch A verläuft und tangential zu g in B ist.
Hinweis: "Konstruieren" heißt in diesem Fall, den Mittelpunkt M des Kreises zu bestimmen.

Aufgabe 2.
Seien K_1 und K_2 zwei Kreise im $\mathbb{R}^2$ (mit der üblichen Definition von Geraden usw.). Konstruieren Sie mit Zirkel, Lineal und Geodreieck alle Geraden, die jeweils tangential zu K_1 und K_2 ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion. Diskutieren Sie die Existenz einer solchen Gerade und die mögliche Anzahl von Geraden, die die Bedingung erfüllen.

Aufgabe 3.
(a) Seien zwei Kreise gegeben, die sich in genau einem Punkt P schneiden, d.h. sie sind tangential in P zueinander. Eine Gerade durch P schneide die beiden Kreise außer in P noch in Q bzw. in R. Seien S und T zwei Punkte auf dem Kreis, der Q bzw. R enthält und die auf verschieden Seiten der Geraden $G(Q, R)$ liegen. Fertigen Sie eine Skizze an. Zeigen Sie, dass $\measuredangle(PSQ) \cong \measuredangle(PTR)$.
(b) Sei nun weiterhin vorausgesetzt, dass S, T und P auf einer Geraden liegen. Beweisen Sie, dass dann die Geraden $G(Q, S)$ und $G(R, T)$ parallel zueinander sind.

Aufgabe 4.
(a) Zwei Kreise schneiden sich in in zwei Punkten A und B. Eine Gerade durch A schneide die zwei Kreise außrdem noch in C bzw. D. Zeigen Sie, dass die Kongruenzklasse des Winkels $\measuredangle(CBD)$ für alle solchen Geraden gleich ist.
(b) Zeigen Sie, dass diese Behauptung sogar richtig ist, falls man zulässt, dass die Gerade die Tangente in A an einen der beiden Kreise ist. Dann gibt es nur noch einen weiteren Schnittpunkt mit den zwei Kreisen, der entweder C oder D aus (a) entspricht. Die Kongruenzklasse des Winkels $\measuredangle(CBA)$ bzw. $\measuredangle(ABD)$ ist dann dieselbe wie für die Geraden unter (a).

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden.

Wir betrachten im Folgenden eine Geometrie, in der die Axiome der Inzidenz, Anordnung und Kongruenz sowie das Parallelenaxiom gelten.

- Gegeben sei ein Kreis und ein Punkt P, der außerhalb davon liegt. Konstruieren Sie mit Zirkel, Lineal und Geodreieck eine Gerade durch P, die den Kreis tangential berührt, d.h. die genau einen Punkt mit dem Kreis gemeinsam hat. Diese Konstruktion funktioniert z.B. im $\mathbb{R}^2$, benötigt im Allgemeinen aber eine weitere Eigenschaft (Axiom) der Geometrie, die nicht aus den genannten Axiomen folgt. Welche? Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion. Diskutieren Sie die Existenz einer solchen Gerade und die mögliche Anzahl von Geraden, die die Bedingung erfüllen. Nehmen Sie hierfür an, das wir es mit der euklidischen Geometrie des $\mathbb{R}^2$ (mit der üblichen Definition von Geraden usw.) zu tun haben.

- Zwei Kreise schneiden sich in zwei Punkten A und B. Die Durchmesser der Kreise, die A bzw. B enthalten, schneiden diese jeweils noch in C bzw. D. Beweisen Sie, dass B, C und D auf einer Geraden liegen.

- Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt M. Sei $B \in AC$, AB eine Sehne und $BC \cong MB$. Sei D ein weiterer Punkt auf dem Kreis mit $M \in CD$. Fertigen Sie eine Skizze an. Zeigen Sie, dass $\measuredangle(AMD)$ kongruent zum Dreifachen des Winkels $\measuredangle(ACD)$ ist.
  Hinweis: Betrachten Sie den Durchmesser, der B enthält. Neben dem Umfangswinkelsatz benötigen Sie noch andere "Winkelsätze", die nichts speziell mit Kreisen zu tun haben. Welche haben Sie in der Vorlesung kennengelernt?