Prof. Klaus Mohnke
Viktor Fromm, Ph.D.
Dr. Josua Groeger
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 9

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 13.6.2012

Aufgabe 1
Auf einem Blatt Papier sei ein Stück eines Kreises, der so groß ist, dass der Mittelpunkt nicht mehr auf diesem Blatt liegt. Wie kann man nun die Tangente an den Kreis in einem vorgegebenen Punkt finden? Sie dürfen dabei Zirkel, Lineal und Winkelmesser benutzen. Die Konstruktion ist dabei jedoch vollständig auf dem vorliegenden Blatt Papier auszuführen.

Aufgabe 2.
Seien A und B zwei verschiedene Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt O. Es sei P der Schnittpunkt der Tangenten in A und in B an den Kreis und es sei BC der Durchmesser, der B enthält. Beweisen Sie, dass die Geraden $G(C, A)$ und $G(O, P)$ parallel sind.

Aufgabe 3 [Miguel-Punkt]
Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck, und sei D, E bzw. F ein Punkt auf der Strecke AB, AC bzw. BC. Beweisen Sie, dass die Umkreise der Dreiecke $\Delta(A, D, E)$, $\Delta(B, D, F)$ und $\Delta(C, E, F)$ einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an! Sei $G \neq D$ Schnittpunkt der ersten beiden Umkreise. Betrachten Sie das Viereck $CEGF$ und benutzen Sie, dass $ADGE$ und $BFGD$ Sehnenvierecke sind (siehe Rückseite).

Aufgabe 4. Im Beweis des Umfangswinkelsatzes wurde nur der Fall bewiesen, dass der Mittelpunkt M des Kreises im Inneren des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ liegt. Führen Sie den Beweis für den Fall durch, dass M im Äußeren liegt: Seien also A, B, C drei Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, so dass C und M auf derselben Seite der Geraden $G(A, B)$ liegen. M liege im Äußeren des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$. Beweisen Sie, dass $2\measuredangle(ACB) = \measuredangle(AMB)$.

Hinweis: Sie dürfen Winkelmaße verwenden. Die Aussage gilt aber z.B. auch in allgemeineren Geometrien, wie man sehen kann, wenn man die Argumentation aus der Vorlesung auf diesen Fall überträgt.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden.
Wir betrachten im folgenden eine Geometrie, in der die Axiome der Inzidenz, Anordnung und Kongruenz sowie das Parallelenaxiom gelten.

- Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck. Konstruieren Sie einen Kreis (den sogenannten *Umkreis*), auf dem die Eckpunkte A,B und C liegen. Ist dieser eindeutig bestimmt?
- Gegeben sei ein sich nicht überschlagendes Viereck $ABCD$. Zeigen Sie, dass der Innenwinkel in A genau dann kongruent zum Außenwinkel bei C ist, wenn die Punkte A,B,C,D auf einem Kreis liegen. In diesem Fall spricht man von einem *Sehnenviereck*. Wie lautet die Bedingung an den Innenwinkel dafür, dass der Punkt C im Inneren des Umkreises des Dreiecks $\Delta(A, B, D)$ liegt?
- In der Ebene seien zwei parallele Geraden sowie ein Punkt zwischen ihnen gegeben. Konstruieren Sie einen Kreis, der den Punkt enthält und tangential an beide Geraden ist.
- Durch einen Punkt A auf einem Kreis mit Mittelpunkt O, sei die Tangente an den Kreis sowie eine Sekante gegeben, die den Kreis außer in A noch in B schneide. Der Durchmesser, der senkrecht auf dem Radius OB steht, treffe die Tangente im Punkte C und die Sekante in D. Beweisen Sie die Kongruenz $AC \equiv CD$.