Klausur **zur Vorlesung Elementargeometrie** — Prof. Klaus Mohnke und Mitarbeiter

08.08.2012

Nachname, Vorname:

Matrikelnummer:

Bitte unterschreiben Sie hier *bei der Abgabe:*

- Zum Bearbeiten der Klausur haben Sie zwei Stunden Zeit.
- Tragen Sie auf diesem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Nach- und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer ein.
- Ein beidseitig von Hand beschriebenes Blatt mit Notizen ist zugelassen.
- Sie dürfen Zirkel, Lineal, Geodreieck und Winkelmesser, sowie einen elektronischen Taschenrechner verwenden.
- Weitere Hilfsmittel sowie elektronische Geräte sind *nicht zugelassen*. Handys müssen ausgeschaltet sein.
- Die Klausur gilt als bestanden, wenn 30 der regulären Punkte erreicht wurden. Die Punkte aus der Zusatzaufgabe können in diesem Fall die Note verbessern.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Klausur.

Aufgabe	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Z*	Σ
maximale Punktezahl	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*5*	60
erreichte Punktezahl								
Korrektor								

Bewertung:

Berlin, den 08.08.2012

1 (a) Geben Sie eine Konstruktion für den Mittelpunkt M einer beliebig gegebenen Strecke AB an. Wenden Sie dabei die Axiome der Winkel- und Streckenabtragung an. Sie brauchen diese Konstruktion nicht zu begründen.

(b) Führen Sie die folgende Konstruktion mit Winkelmesser und Lineal ohne Skalenteilung für M aus:

(1) Lege einen Punkt P fest, der nicht auf der Geraden $G(A, B)$ liegt.

(2) Trage den Winkel $\measuredangle(PBA)$ an den Strahl in A, der B enthält, auf die Seite von $G(A, B)$ ab, die P nicht enthält.

(3) Trage den Winkel $\measuredangle(PAB)$ an den Strahl in B, der A enthält, auf die Seite von $G(A, B)$ ab, die P nicht enthält.

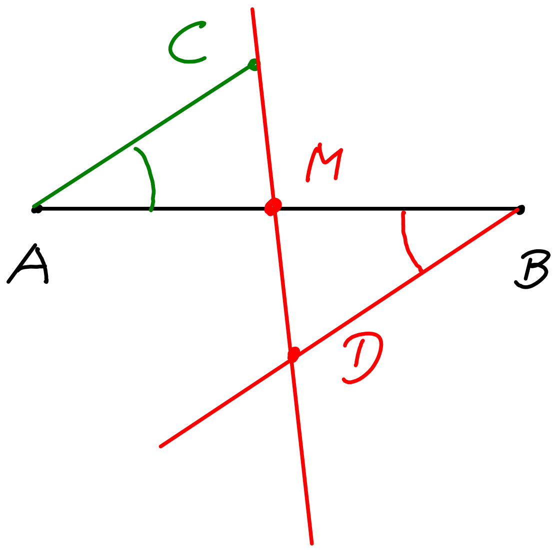
(4) Die in (2) und (3) konstruierten Strahlen schneiden sich in einem Punkt. Ermittle diesen Punkt und bezeichne ihn mit Q.

(5) Die Gerade $G(P, Q)$ schneidet die Strecke AB in M.

Welche Axiome werden bei Schritten (1), (2) bzw. (3) verwendet? Beweisen Sie die aufgestellten Behauptungen in Schritt (4) und (5).

Hinweis: Hierfür wird das Parallelenaxiom (P) nicht benötigt. Die Verwendung desselben führt bei der Korrektur zu einem Punktabzug. Die Gültigkeit der unter (a) erfragten Konstruktion ist wesentlich für die Argumentation und darf vorausgesetzt werden.

(a)



1. Wähle $C \notin G(A,B)$
2. Trage $\measuredangle(CAB)$ an Strahl in B durch A auf die Seite von $G(A,B)$ ab, auf der C nicht liegt.
3. Trage Strecke AC auf unter 2. konstruierten Strahl in B ab. Bezeichne dabei konstruierten Punkt mit D.
4. M ist der Schnittpunkt der Geraden $G(C,D)$ und AB.

2 Punkte

(b)
- (1) benutzt das Anordnungsaxiom: Zu jeder Geraden existiert ein Punkt, der nicht auf ihr liegt.

1 Punkt

- (2) & (3) benutzt das Kongruenzaxiom der Winkelabtragung

1 Punkt

1 (a) Geben Sie eine Konstruktion für den Mittelpunkt M einer beliebig gegebenen Strecke AB an. Wenden Sie dabei die Axiome der Winkel- und Streckenabtragung an. Sie brauchen diese Konstruktion nicht zu begründen.

(b) Führen Sie die folgende Konstruktion mit Winkelmesser und Lineal ohne Skalenteilung für M aus:

(1) Lege einen Punkt P fest, der nicht auf der Geraden $G(A, B)$ liegt.

(2) Trage den Winkel $\measuredangle(PBA)$ an den Strahl in A, der B enthält, auf die Seite von $G(A, B)$ ab, die P nicht enthält.

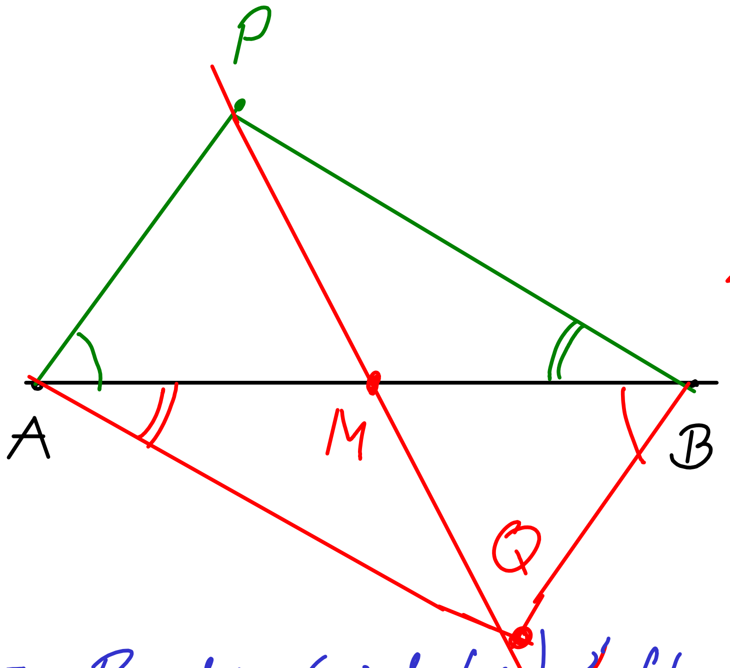
(3) Trage den Winkel $\measuredangle(PAB)$ an den Strahl in B, der A enthält, auf die Seite von $G(A, B)$ ab, die P nicht enthält.

(4) Die in (2) und (3) konstruierten Strahlen schneiden sich in einem Punkt. Ermittle diesen Punkt und bezeichne ihn mit Q.

(5) Die Gerade $G(P, Q)$ schneidet die Strecke AB in M.

Welche Axiome werden bei Schritten (1), (2) bzw. (3) verwendet? Beweisen Sie die aufgestellten Behauptungen in Schritt (4) und (5).

Hinweis: Hierfür wird das Parallelenaxiom (P) nicht benötigt. Die Verwendung desselben führt bei der Korrektur zu einem Punktabzug. Die Gültigkeit der unter (a) erfragten Konstruktion ist wesentlich für die Argumentation und darf vorausgesetzt werden.



2 Punkte

• Sei R der (eindeutige) Punkt mit: P, R auf versch. Seiten von G(A, B), $\measuredangle(ABR) \cong \measuredangle(PAB)$ & $BR \cong AP$.

$AB = BA$

[SWS] $\Rightarrow \Delta(P, A, B) \cong \Delta(A, B, R)$

Def. d. Kongr. von Δ $\Rightarrow \measuredangle(BAR) \cong \measuredangle(ABP)$

Eind. der Winkelabtragung $\Rightarrow$ R liegt auf unter (2) konstr. Strahl

$\Rightarrow$ R ist Schnittpunkt der unter (2) & (3) konstr. Strahlen.

Diese Strahlen liegen nicht auf einer Geraden $\Rightarrow$ Schnittpkt eind. $\Rightarrow$ (4).

1

(a) Geben Sie eine Konstruktion für den Mittelpunkt M einer beliebig gegebenen Strecke AB an. Wenden Sie dabei die Axiome der Winkel- und Streckenabtragung an. Sie brauchen diese Konstruktion nicht zu begründen.

(b) Führen Sie die folgende Konstruktion mit Winkelmesser und Lineal ohne Skalenteilung für M aus:

(1) Lege einen Punkt P fest, der nicht auf der Geraden $G(A, B)$ liegt.

(2) Trage den Winkel $\measuredangle(PBA)$ an den Strahl in A, der B enthält, auf die Seite von $G(A, B)$ ab, die P nicht enthält.

(3) Trage den Winkel $\measuredangle(PAB)$ an den Strahl in B, der A enthält, auf die Seite von $G(A, B)$ ab, die P nicht enthält.

(4) Die in (2) und (3) konstruierten Strahlen schneiden sich in einem Punkt. Ermittle diesen Punkt und bezeichne ihn mit Q.

(5) Die Gerade $G(P, Q)$ schneidet die Strecke AB in M.

Welche Axiome werden bei Schritten (1), (2) bzw. (3) verwendet? Beweisen Sie die aufgestellten Behauptungen in Schritt (4) und (5).

Hinweis: Hierfür wird das Parallelenaxiom (P) nicht benötigt. Die Verwendung desselben führt bei der Korrektur zu einem Punktabzug. Die Gültigkeit der unter (a) erfragten Konstruktion ist wesentlich für die Argumentation und darf vorausgesetzt werden.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle(BAP) \cong \measuredangle(ABQ) \\ \measuredangle(ABP) \cong \measuredangle(BAQ) \\ AB \cong BA \end{array}\right\} \text{nach Konstr.}$$

(WSW) $\Rightarrow$ $\triangle(A,B,P) \cong \measuredangle(B,A,Q)$

also: $\measuredangle(BAP) \cong \measuredangle(ABQ)$

$AP \cong BQ$

Teilaufgabe (a) $\Rightarrow$ $G(P,Q)$ schneidet AB in Mittelpkt M.

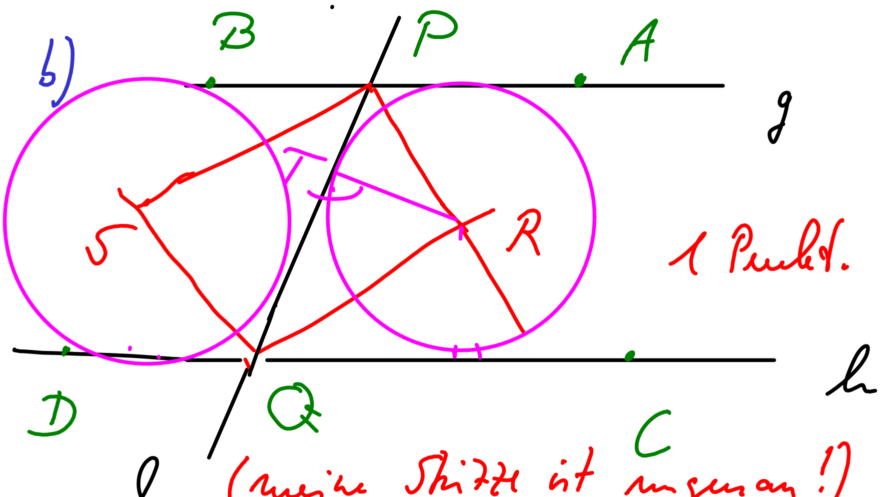
2 (a) Wann heißt eine Gerade tangential an einen Kreis?

(b) Seien zwei zueinander parallele Geraden g und h sowie eine dritte Gerade l gegeben, die g und h in jeweils genau einem Punkt schneidet. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal einen Kreis K, zu welchem die drei gegebenen Geraden tangential sind. Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion und diskutieren Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung!

a) Eine Gerade heißt tangential an einen Kreis, wenn beide genau einen Punkt gemeinsam haben (alt: "wenn sie diesen in genau einem Punkt schneidet" oder "wenn sich beide in genau einem Punkt berühren": wichtig ist Term "genau einem"!)

1 Punkt.

b)



(meine Skizze ist ungenau!)

1 Punkt.

Bezeichne Schnittpkt von l und g mit P, von l und h mit Q. Seien weiterhin $A,B \in g$ & $C,D \in h$ wie in Skizze gegeben.

Konstruktion: 1.) Konstruiere die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle(APQ)$ & $\sphericalangle(BPQ)$ sowie $\sphericalangle(CQP)$ & $\sphericalangle(DQP)$.

2.) Seien R bzw. S die Schnitte der Winkelhalb. von $\sphericalangle(APQ)$ & $\sphericalangle(CQP)$ bzw. $\sphericalangle(BPQ)$ & $\sphericalangle(DQP)$

3.) Fälle das Lot von R auf l: Fußpunkt T. Kreise mit Radius $\overline{RT}$ um R bzw. S sind die gesuchten Kreise.

2 Punkte

2 (a) Wann heißt eine Gerade tangential an einen Kreis?

(b) Seien zwei zueinander parallele Geraden g und h sowie eine dritte Gerade l gegeben, die g und h in jeweils genau einem Punkt schneidet. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal einen Kreis K, zu welchem die drei gegebenen Geraden tangential sind. Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion und diskutieren Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung!

Begründung der Konstruktion:

Konstruktion liefert alle Kreise (notwendige Bedingung):

Fakt aus VL: • ein Kreis liegt (bis auf Berührpunkt) immer vollständig auf der gleichen Seite einer Tangente wie sein Mittelpunkt

⇒ der Kreis & sein Mittelpunkt liegen zwischen g & h & auf einer Seite von l

⇒ ein Kreis, der g & l berührt liegt vollständig in einem der vier durch je einen Strahl auf g & l geg. Winkel

Dies ist eine knappe Begründung deren Fehlen nicht geahndet würde

weiterer Fakt aus VL/ÜE: • ein Kreis, der die beiden Schenkel eines Winkels berührt, hat seinen Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden.

• umgekehrt ist jeder Punkt der Winkelhalbierenden Mittelpunkt genau eines Kreises, nämlich mit Radius gegeben durch den Abstand auf einen der Schenkel. (wird erst später gebraucht)

Daraus folgt: je nachdem auf welcher Seite von l der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt, muss er auf den Winkelhalbierenden von $\measuredangle(APQ)$ und $\measuredangle(CQP)$ oder

$\measuredangle(BPQ)$ und $\measuredangle(DQP)$

liegen.

3 Punkte

2 (a) Wann heißt eine Gerade tangential an einen Kreis?

(b) Seien zwei zueinander parallele Geraden g und h sowie eine dritte Gerade l gegeben, die g und h in jeweils genau einem Punkt schneidet. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal einen Kreis K, zu welchem die drei gegebenen Geraden tangential sind. Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion und diskutieren Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung!

Konstruktion ist korrekt (sie liefert tatsächlich Lösungen)
Umkehrung der Aussage über Winkelhalbierende (siehe oben)
liefert jeweils Kreis der h & l bzw. g & l berührt
mit Radius gegeben durch Lot auf l => es ist derselbe
Kreis, der damit g, h & l berührt. 1 Punkt

Nicht gefordert: zusätzlich gilt: $\Delta(P,R,Q) \cong \Delta(Q,S,P)$
(WSW) => die Höhen von R bzw. S auf PQ sind kongruent
=> beide Kreise haben denselben Radius.

<u>Existenz</u>: Die Winkelhalbierenden sind nicht parallel
(Gegenwinkelsumme $= \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \neq 180^\circ$
=> Umkehrung des Stufen-/Gegenwinkelsatzes)

Die jeweils zu ihnen entgegengesetzten Strahlen schneiden sich jedoch nicht, da sie <u>beide</u> einen stumpfen Winkel mit l bilden. Wegen Lage bezüglich zu l müssen sich also die Winkelhalb. schneiden.
1 Punkt.

Eindeutigkeit / Anzahl der Lösungen: an allen Geraden folgt, dass es für diese Aufgabe immer <u>genau zwei</u> Lösungen gibt.
1 Punkt

<u>Bemerkung</u>: Alternative Lösungen durch Schnitt von "Mittelgerade" & Winkelhalbierenden in P <u>oder</u> "Mittelgeraden" ⇝ Ermittlung des Radius R ⇝ zwei zu l parallele Geraden mit Abstand R

3 (a) Benennen Sie zwei geometrische Eigenschaften der Spiegelung am Kreis (auch Inversion am Kreis genannt).

(b) Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r = 3cm$. Beschreiben Sie exakt die Bilder der folgenden Teilmengen unter Spiegelung an K: !

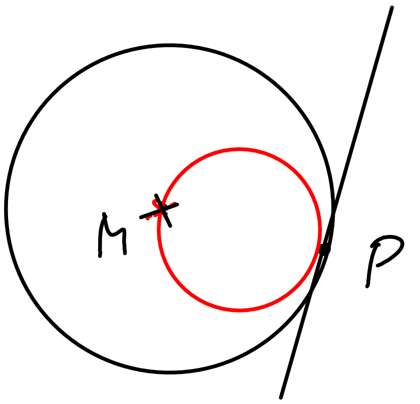
(1) Eine Gerade, die mit K genau einen Punkt gemeinsam hat.
(2) Eine Gerade, die M enthält.
(3) Ein Kreis vom Radius $s = 1cm$, der M enthält.
(4) Ein Kreis L mit Mittelpunkt N vom Radius $R = 4cm$ und Abstand $|MN| = 5cm$.

Fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

(a) • überführt Geraden und Kreise in Geraden oder Kreise
• erhält Winkel
(Fixpunktmenge ist der Kreis; zweimal (hintereinander) ausgeführt überführt beliebigen Punkt in sich selbst).

2 Punkte

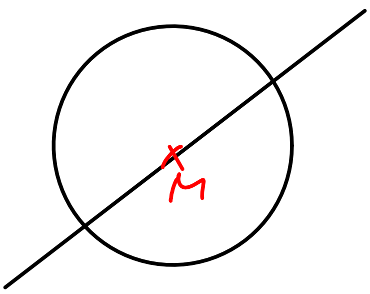
(b)(1)



Spiegelung überführt Tangente in P in Kreis durch M & P mit Durchmesser MP.

1+1 Punkte

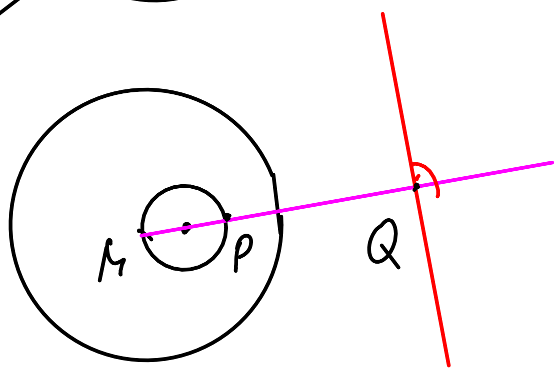
(2)



Spiegelung überführt Gerade durch M in sich selbst.

1+1 Pkt.

(3)



Sei MP der Durchmesser des kleinen Kreises, der M enthält. Spiegelung überführt kleinen Kreis in Gerade, die senkrecht auf $G(P,M)$ steht in Q: $P \in QM$

& $|QM||PM| = 3^2 = 9$ $|PM|=2$

$\Rightarrow |QM| = 4{,}5$ cm. 1+1 Pkt.

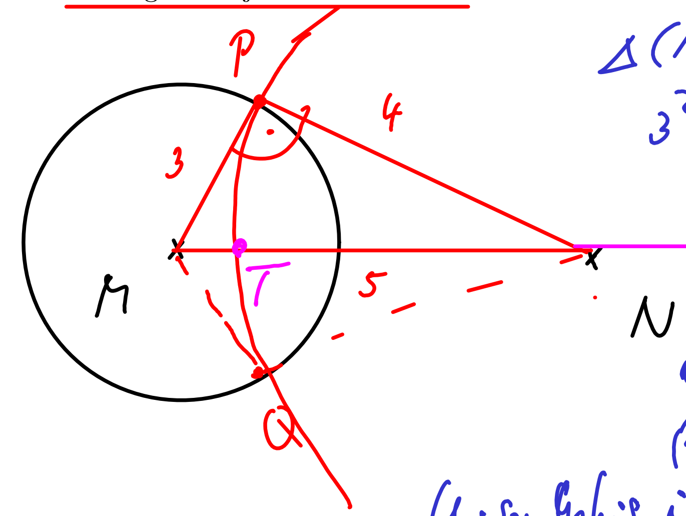
3 (a) Benennen Sie zwei geometrische Eigenschaften der Spiegelung am Kreis (auch Inversion am Kreis genannt).

(b) Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r = 3cm$. Beschreiben Sie exakt die Bilder der folgenden Teilmengen unter Spiegelung an K: !

(1) Eine Gerade, die mit K genau einen Punkt gemeinsam hat.
(2) Eine Gerade, die M enthält.
(3) Ein Kreis vom Radius $s = 1cm$, der M enthält.
(4) Ein Kreis L mit Mittelpunkt N vom Radius $R = 4cm$ und Abstand $|MN| = 5cm$.

Fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

(4)



$\Delta(M,P,N)$ ist rechtwinklig, da $3^2+4^2=5^2$!

P & Q werden in sich überführt. Wegen Winkeltreue wird dieser Kreis in Kreis durch P & Q überführt, der den Ursprungskreis in P & Q ~~berührt~~ => es muss derselbe Kreis sein.

Alternativ: $|MT| = 5-4 = 1 \quad |MU| = 4+5 = 9$

$\Rightarrow |MT| \cdot |MU| = 9 = 3^2 \Rightarrow$ Spiegelung überführt T in U & U in T

$\Rightarrow$ Bildkreis enthält P, Q, T, U : Urkreis aber auch.

Schon 3 Punkte legen Kreis eindeutig fest

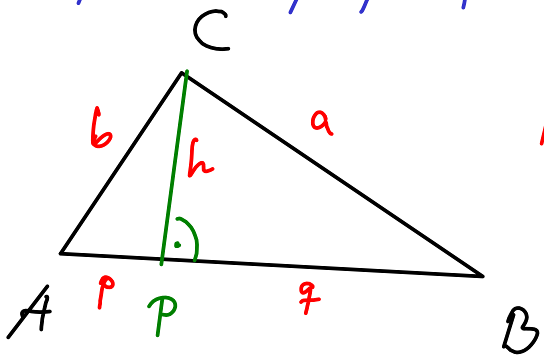
$\Rightarrow$ Bildkreis = Kreis

1+1 Punkte

4 (a) Formulieren Sie zwei Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras.

(b) Sei im Dreieck $\Delta(A,B,C)$ der Winkel $\measuredangle(BCA)$ ein rechter Winkel und sei P der Fußpunkt des Lotes von C auf $G(A,B)$. Berechnen Sie die Seitenlängen $|AC|$ und und $|AB|$ in Abhängigkeit von $|BC| = a$ und $|PC| = h$.

(a) Sei $\Delta(A,B,C)$ rechtw. Dreieck, $\measuredangle(ACB)$ ist rechter W. Bezeichne mit P Fußpunkt des Lotes (der Höhe) von C auf AB & mit $a := |BC|$, $b := |AC|$, $c := |AB|$, $p := |AP|$, $q := |BP|$, $h := |CP|$



$p + q = c$.

Dann gilt:

1) $a^2 + b^2 = c^2$

2) $h^2 = pq$

3) $a^2 = cq$

4) $b^2 = cp$

2 Punkte

b) Pythagoras im $\Delta(B,C,P)$: $q^2 + h^2 = a^2$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{a^2}{q} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - h^2} - a^2} = \sqrt{\frac{a^4 - a^4 + a^2h^2}{a^2 - h^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2h^2}{a^2 - h^2}} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

8 Punkte (1 Pkt. für Schritte bei unvollst. Lsg.)

4 (a) Formulieren Sie zwei Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras.

(b) Sei im Dreieck $\Delta(A, B, C)$ der Winkel $\measuredangle(BCA)$ ein rechter Winkel und sei P der Fußpunkt des Lotes von C auf $G(A, B)$. Berechnen Sie die Seitenlängen $|AC|$ und und $|AB|$ in Abhängigkeit von $|BC| = a$ und $|PC| = h$.

Bemerkung: Fehlende Vereinfachungen der Lösung führten NICHT zu Punktabzug! Betrachtung der Flächeninhalte

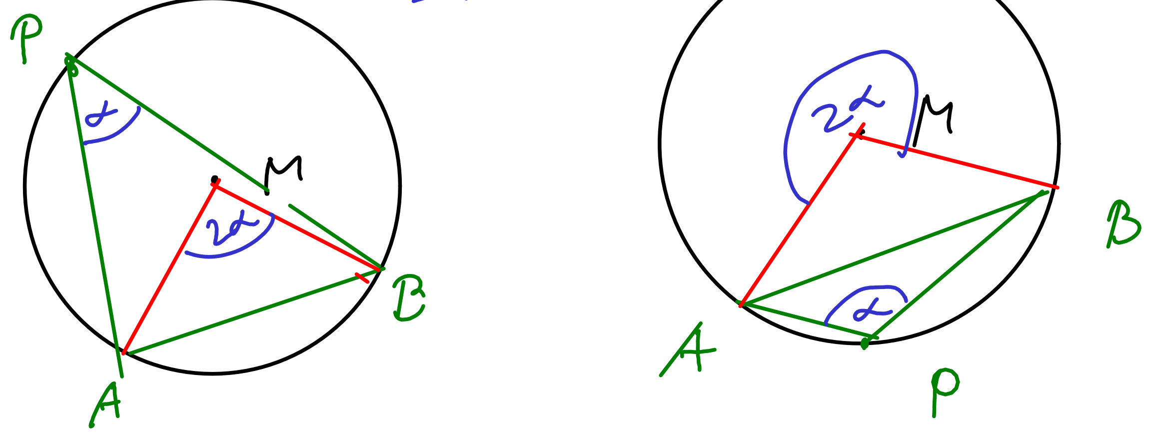
5 (a) Formulieren Sie den Umfangswinkelsatz und den Stufenwinkelsatz.

(b) Seien AD und BC zwei voneinander verschiedene Sehnen eines Kreises, die sich in einem Punkt P schneiden. Zeigen Sie: Wenn die Strecken AP und BP zueinander kongruent sind, dann sind die beiden Geraden $G(A, B)$ und $G(C, D)$ parallel. $(\Rightarrow)$

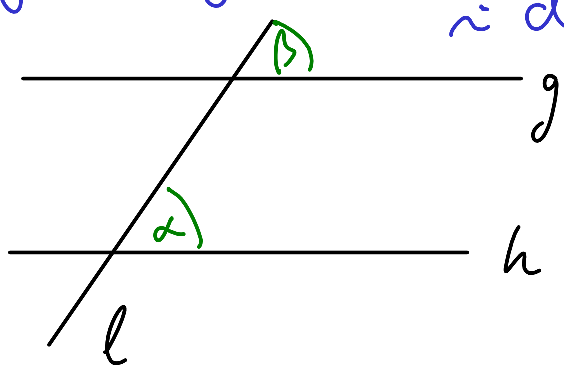
a) • Sei AB eine Sehne eines Kreises mit Mittelpunkt M. P ein anderer Punkt des Kreises. Dann ist der Winkel $\measuredangle(APB)$ halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel in M.

1 P.

2 Fälle



• Seien zwei Geraden g & h sowie eine dritte Gerade l gegeben. Die mit α & β bezeichneten Winkel in der Konfiguration unten links sind Stufenwinkel. Dann gilt: g ist parallel zu h genau dann, wenn $\alpha \cong \beta$

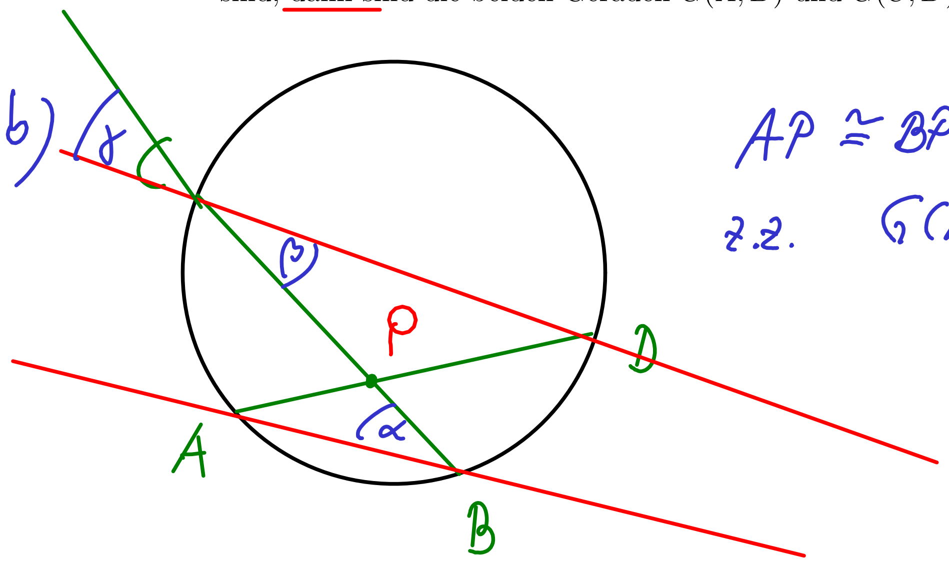


1 P.

5 (a) Formulieren Sie den Umfangswinkelsatz und den Stufenwinkelsatz.

(b) Seien AD und BC zwei voneinander verschiedene Sehnen eines Kreises, die sich in einem Punkt P schneiden. Zeigen Sie: Wenn die Strecken AP und BP zueinander kongruent sind, dann sind die beiden Geraden $G(A, B)$ und $G(C, D)$ parallel. ($\Rightarrow$)

b)



$AP \cong BP$

z.z. $G(A,B) \parallel G(C,D)$

Umfangswinkelsatz $\Rightarrow$ $\sphericalangle(BAD) \cong \sphericalangle(BCD)$

$\Delta(A,P,B)$ gleichsch. Basiswinkelsatz $\Rightarrow$ $\sphericalangle(BAP) \cong \sphericalangle(ABP)$

$\sphericalangle(BAP) = \sphericalangle(BAD)$, $\sphericalangle(ABP) = \sphericalangle(ABC)$

nicht unbedingt wichtig ($\sphericalangle(BAD)$ $\sphericalangle(ABC)$)

$\Rightarrow$ Wechselwinkel $\alpha \cong \beta$

(Scheitelwinkelsatz $\Rightarrow$ Stufenwinkel $\alpha \cong \gamma$ Fehler wurde nicht geahndet)

$\Rightarrow$ (Umkehrung des Stufenwinkelsatzes) : $G(A,B) \parallel G(C,D)$

Bemerkung: • Aufgabe musste die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes festgestellt werden: entweder hier oder unter a)).

8 Punkte

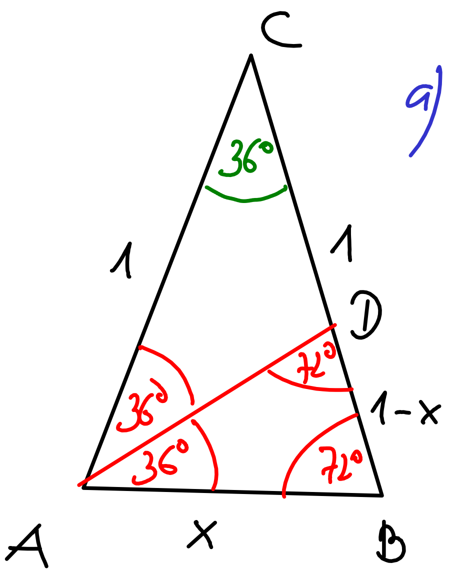
• Alternative Lösung: Sehnensatz: $|PB||PC| = |PA||PD|$

$PA \cong PB \Rightarrow PC \cong PD$ ...

6 In der Vorlesung wurde für die Konstruktion mit Zirkel und Lineal des regelmäßigen Fünfecks ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit folgenden Eigenschaften betrachtet: $|AC| = |BC| = 1$, d.h. das Dreieck ist gleichschenklig. Die Maßeinheit für die Länge sei dabei festgelegt und nicht näher bezeichnet. Weiterhin betrage der Innenwinkel in C, $\measuredangle(ACB) = 36°$ bzw. $\pi/5$.

(a) Sei D der Schnittpunkt mit BC der Winkelhalbierenden von $\measuredangle(BAC)$. Berechnen Sie die Innenwinkel der Dreiecke $\Delta(D, A, C)$ und $\Delta(D, A, B)$.

(b) Berechnen Sie die Länge der Seite AB.



a) Innenwinkelsumme & Winkelhalb. ergeben folgende Innenwinkel (siehe Skizze!). Sei $|AC| = |BC| = 1$, $|AB| =: x$ gesucht.

b) $\Rightarrow$ $\Delta(A,B,D)$ ist gleichschenklig

$\Rightarrow |AD| = |AB| = |CD| = x$

$\Rightarrow |BD| = 1-x$

4 Punkte!

$\Delta(B,D,A) \sim \Delta(A,B,C)$

$\Rightarrow \quad \frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} = x$

$\Rightarrow \quad 1-x = x^2$

$\Rightarrow \quad x^2+x-1=0 \qquad x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1}$

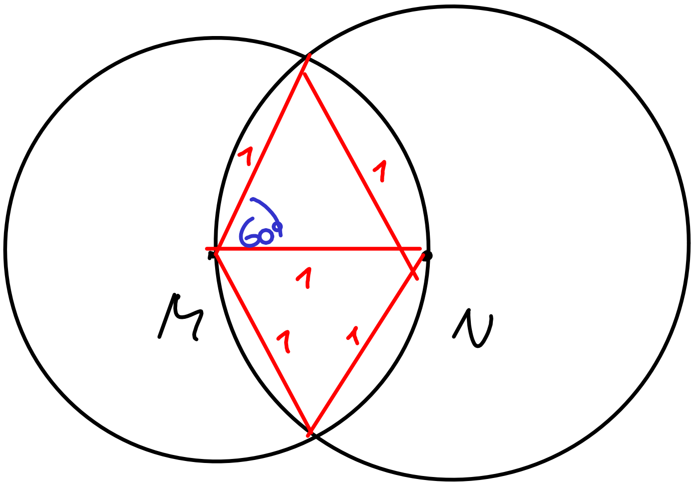
$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$x>0 \Rightarrow \boxed{|AB| = x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}.$

6 Punkte.

Zusatzaufgabe.

Berechnen Sie den Flächeninhalt F des Durchschnittes zweier Kreise in $\mathbb{R}^2$ vom Radius $r = 1$, deren Mittelpunkte den Abstand 1 haben.



Aus Additivität des Flächeninhalts folgt

$F = 4 \cdot$ Fläche (Kreissegment 60°) $- 2 \cdot$ Fläche (gleichs. Δ der Länge 1)

$$= 4\left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\sin 60°}_{= \frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

5 Punkte

Allg. Bemerkungen: • Aufgabenstellung genau lesen! (siehe unterstrichene Stellen)

• Zusammenhänge erkennen: Teil (a) hat irgendwie immer etwas mit Teil (b) zu tun! (a) ist Lernstoff und könnte auf Ihrem Spickzettel stehen.