Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik

Einige Lösungsvorschläge für die Klausur zur Vorlesung

Lineare Algebra und analytische Geometrie II* - SS 2008

10.07.2008

Aufgabe 1
Im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt ist die folgende Matrix gegeben

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $\phi(x) = Ax$, eine orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^3$ ist.

2 P

(b) Beschreiben Sie geometrisch die Abbildung ϕ. Geben Sie folgende Daten explizit an: Spiegelungsebene oder Drehachse, -winkel und -richtung. Fertigen Sie eine Skizze an.

7 P

(c) Finden Sie eine ganze Zahl $n > 0$, so dass $\phi^n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.

1 P

10 P

Lösung

(a) ϕ ist orthogonal gdw. $< \phi(x), \phi(y) >=< x, y >$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$, also gdw. $A^T A = AA^T = \mathbb{E}_3$.

1 P

(b) Wegen (a) folgt $det(A) \in \{\pm 1\}$. Es gilt $det(A) = 1$, also eine Drehung. Entweder sieht man, dass $(0, 1, 1)^t$ Eigenvektor zum Eigenwert $+1$ ist, oder man rechnet nach: $\chi(A) = det(A - t\mathbb{E}_3) = 1 - 2t + 2t^2 - t^3 = (1 - t)(t^2 - t + 1)$. Die Drehachse ist eine Ursprungsgerade, gegeben durch den Eigenraum zum Eigenwert $+1$: $EV(A, +1) = (0, 1, 1)^t$. Wir ergänzen $(0, 1, 1)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$: $(0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, -1)$. Schreiben die Vektoren in eine Matrix $\tilde{H}$, man beachte $det(\tilde{H}) = 1$, also ist die Basis orientiert. Mit Hilfe von GS-Verfahren erhalten wir daraus eine orientierte ONB: $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Schreiben diese als Spalten von H und berechnen:

$$H^t \cdot G \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Rechts unten steht nun eine Drehmartix. Da $cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ und $sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ folgt, dass A eine Drehung um 60 in mathematisch positive Richtung darstellt. Skizze.

8 P

(c) Da A eine Drehung um 60 ist, folgt dass $A^6 = \mathbb{E}_3$ ist.

1 P

Aufgabe 2
Sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4}\sqrt{3} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}), \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie die Polarzerlegung der Matrix A, d.h. finden Sie eine orthogonale Matrix O und eine positiv definite Matrix H mit $A = OH$.

10 P

Lösung

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4}\sqrt{3} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = O \cdot H$$

H hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$ und eine ONB aus Eigenvektoren ist gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

Aufgabe 3
(a) Zeigen Sie, dass

$$\langle x, y\rangle = x^t \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 9 & 5 \\ 2 & 5 & 18 \end{pmatrix} \cdot y,$$

$x,\ y \in \mathbb{R}^3$, ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

2 P

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, indem Sie das Gram-Schmidtsche Verfahren auf die Standardbasis anwenden.

6 P

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $(1, 1, 1)^t$ bzgl. dieser Basis.

2 P

10 P

Aufgabe 4
Sei $A \in M(n;\mathbb{C})$ eine $n \times n$-Matrix.

a) Begründen Sie, warum es eine unitäre Matrix T gibt, so dass $\overline{T}^t A^* A T$ Diagonalgestalt hat, mit nicht-negativen reellen Einträgen auf der Diagonalen.

4 P

b) Seien λ_k, $k = 1 \ldots n$, die Einträge dieser Matrix auf der Diagonalen. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2 .$$

6 P

10 P

Lösung:

a) S ist **selbstadjungiert**, weil

$$S^* = (A^* A) = A^* \left(A^*\right)^* = A^* A = S.$$

Deswegen, Spektralsatz $\Rightarrow$ es gibt eine orthonormale Basis $\{e_1, ..., e_n\}$ von Eigenvektoren von S.

b) Die Matrix T is definiert durch

$$v_j = \sum_i T_{ij} e_i.$$

Die ist **unitär**, weil beide Basen orthonormal sind.

c) Da $\{v_i\}$ eine ONB ist, hat man $\lambda_i = \langle v_i, S v_i\rangle$. Daraus folgt

$$\sum_j \lambda_j = \sum_j \langle v_j, S v_j\rangle = \operatorname{tr}(S) .$$

Wir wissen, dass die Spur unabhängig von der Basis ist, also gilt auch

$$\sum_j \lambda_j = \sum_j \langle e_j, S e_j\rangle = \sum_j S_{jj} .$$

Wir benutzen $S = A^* A$, also $S_{ij} = \sum_k \left(A^*\right)_{ik} A_{kj}$. Und auch $\left(A^*\right)_{ik} = \bar{A}_{ki}$. Daraus folgt

$$\sum_j S_{jj} = \sum_{jk} \bar{A}_{kj} A_{kj} = \sum_{jk} |A_{kj}|^2 .$$

Aufgabe 5
Sei $Q := \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5x^2 + 5y^2 + 6xy + 4x - 4y = 4\}$.

(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$. Geben Sie eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$ an, die Q in die euklidische Normalform überführt.

7 P

(b) Von welchem Typ ist Q? Skizzieren Sie die Quadrik Q in den ursprünglichen Koordinaten.

2 P

(c) Für welche euklidischen Bewegungen Φ gilt $\Phi(Q) = Q$?

1 P

10 P

Lösung:
Zu (a). Die Quadrik Q ist gegeben als Nullstellenmenge des quadratischen Polynoms

$$P(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4.$$

Sei $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ und $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Zunächst führt man die Hauptachsentransformation an der Matrix M durch. Man hat $\chi_M(t) = t^2 - 10t + 16$, also die Eigenwerte $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 2$. Eine orientierte ONB aus Eigenvektoren ist gegeben durch $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sei T_1 gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_1(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, mit $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Man erhält $P \circ T_1(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = xx'^2 + 2y'^2 + 2 \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 4$.

Quadratische Ergänzung: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_2(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' + \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

In den neuen Koordinaten wird die Quadrik beschrieben durch $8x''^2 + 2y''^2 - 8 = 0$. Die euklidische Normalform von Q ist also gegeben durch die Gleichung

$$x''^2 + \frac{1}{4} y''^2 = 1.$$

Die Bewegung $S = (T_1 \circ T_2)^{-1}$ überführt also Q in die euklidische Normalform. Es gilt $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = S(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (T_2^{-1} \circ T_1^{-1})(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Zu (b). Bei Q handelt es sich um eine Ellipse, mit Halbachsenlängen 2 und 1. Für $T = T_1 \circ T_2$ erhält man $T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, allgemeiner $T(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In den ursprünglichen Koordinaten ist also der Mittelpunkt m von Q gegeben durch $m = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die große Halbachse ist v_2, die kleine v_1.

Zu (c). In den neuen Koordinaten (d.h. für die euklidische Normalform) ist die Menge der Bewegungen, die die Quadrik invariant lassen, gegeben durch $I'' = \{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,|\, c, d = \pm 1\} \subseteq O(2)$.

Die Menge der Bewegungen, die Q invariant lassen, ist also $I = S^{-1} I'' S$. Hierbei identifizieren wir in I'' die Matrizen aus $O(2)$ mit den Bewegungen, die sie beschreiben.

Aufgabe 6
Für die Lösung der folgenden Aufgabe werden keine ausführlichen Rechnungen verlangt, aber Begründungen:
(a) Entscheiden Sie, welche der nachfolgenden reellen Matrizen, A, diagonalisierbar sind, d.h. für welche gibt es eine invertierbare Matrix T mit reellen Koeffizienten, so dass $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

8 P

(b) Bestimmen Sie die reelle Jordansche Normalform der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 P

10 P