Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2008

Abgabe 21.04.2008

Aufgabe 1

a) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \in End(V)$ eine lineare Abbildung mit charakteristischen Polynom $\chi_A(t) = t(t-1)^5(t+2)^2$ und Minimalpolynom $m_A(t) = t(t-1)^2(t+2)$. Welche Jordanschen Normalformen kommen für A in Frage?

b) Finden Sie Matrizen $A, B \in M(3,\mathbb{R})$ deren Minimalpolynome übereinstimmen, die aber nicht zueinander ähnlich sind, d.h. es existiert kein $T \in Gl(3,\mathbb{R})$ mit $A = T^{-1}BT$. Können dann auch die charakteristischen Polynome gleich sein?

c) Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung $A \in End(V)$ ist diagonalisierbar genau dann wenn ihr Minimalpolynom von der Gestalt $m_A(t) = \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)$ ist, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(p(t), q(t))$ für die Polynome $p(t) = t^3 + t^2 + t - 3$ und $q(t) = t^4 - t^3 + 3t^2 - t + 4$ sowie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(p(t), q(t)) = a(t)p(t) + b(t)q(t)$ mit Polynomen $a(t)$ und $b(t)$, wobei die Koeffizienten aller Polynome nacheinander in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ liegen sollen.

Aufgabe 3
Seien $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ und $B \in M(n, m; \mathbb{K})$ zwei Matrizen. Zeigen Sie folgende Aussage: Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert der zur Matrix AB gehörenden linearen Abbildung von $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ so ist λ auch ein Eigenwert, der zur Matrix BA gehörenden Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Gilt diese Behauptung auch für $\lambda = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4
Weisen Sie nach, dass die folgende Matrix nilpotent ist:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $T \in Gl(6,\mathbb{R})$, so dass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist.