Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Lineare Algebra und analytische Geometrie II* - Sommer 2008

Abgabe 02.06.2008

Aufgabe 1
Berechnen Sie $exp(A)$ mit

$$A = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n-2} \\ & & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & & & 1 \\ 0 & & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \in M(n, n, \mathbb{R})$$

Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwicklung von $ln(1+x)$.

1 P

Aufgabe 2
Berechnen Sie die Spektralzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Eine direkte Berechnung zur Ermittlung der Eigenwerte ist aufwendig obgleich möglich. Schauen Sie sich die Matrix genau an...

1 P

Aufgabe 3
Berechnen Sie die Polarzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. finden Sie eine positiv definite Matrix H und eine orthogonale Matrix O mit $A = OH$.

1 P

Aufgabe 4
Beweisen Sie: Zu jeder Matrix $A \in GL(n, \mathbb{C})$ existiert eine Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$, für die $(A(b_1), \ldots, A(b_n))$ eine Orthogonalbasis ist.

1 P

Insgesamt: **4 P**