Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 8

Lineare Algebra und analytische Geometrie II* - Sommer 2008

Abgabe 09.06.2008

Aufgabe 1
Wir betrachten folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 2y^2 = 1\}, \text{ und } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \cdot y = 1\}.$$

Geben Sie einen Automorphismus $\phi \in Aut(\mathbb{R}^2)$ an mit $\phi(A) = B$.

1 P

Aufgabe 2
Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit dem standard Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und der dadurch induzierten Norm $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$. Die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre S^{n-1} ist gegeben durch

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| = 1\}.$$

Wir betrachten die orthodonalen Gruppen $O(n)$ and $O(n-1)$, Zeigen Sie dass

(a) ein Isomorphismus zwischen den Gruppen $O(n-1)$ und $\{A \in O(n) | Ae_n = e_n\} \subset O(n)$ existiert, d.h. also eine Einbettung von $O(n-1)$ nach $O(n)$, wobei e_n der n-te Standard-Basisvektor ist.

(b) folgende Abbildung bijektiv ist:

$$O(n)/O(n-1) \to S^{n-1}, \text{ definiert durch } A \cdot O(n-1) \mapsto Ae_n,$$

wobei hierbei $O(n-1) \subset O(n)$ das Bild des Isomorphismus unter (a) bezeichnet.

1 P

Aufgabe 3
Beschreiben Sie geometrisch die folgenden Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, die durch $\phi(x) = Ax$ gegeben sind, mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie konkrete Daten an: Drehachse, Spiegelungsgerade, oder -ebene, Drehwinkel, und -richtung.

1 P

Aufgabe 4
Gegeben sei die quadratische Form $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Man bestimme eine Isometrie φ von $\mathbb{R}^3$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ derart, dass

$$q(\varphi(x_1, x_2, x_3)) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2.$$

Schliessen Sie von Ihrem Ergebnis auf die Gestalt der Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x) = 1\}$.

1 P

Insgesamt: **4 P**