Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 11

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2008

Abgabe 30.06.2008

Aufgabe 1
Sei $Q := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \,|\, P(x, y, z) := x^2 + 5y^2 - z^2 + 2xy + 2x + 2y = 0\}$.

(a) Man bestimme die euklidische Normalform der Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^3$. Von welchem Typ ist Q?

(b) Fuer welche euklidische Bewegung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist $P \circ T$ in Normalform?

(c) Bestimmen Sie die neuen Koordinaten $(x', y', z') = T^{-1}(x, y, z)$ und beschreiben Sie die Quadrik bezüglich dieser.

(d) Wie liegen die neuen Koordinatenachsen im ursprünglichen Koordinatensystem? Beschreiben Sie nun die Quadrik bezüglich der Koordinaten des alten Systems. Fertigen Sie dafür eine Skizze an!

1 P

Aufgabe 2
Sei K ein beliebiger Körper und $\mathcal{A}$ die Gruppe der affinen Transformationen von K^n. Eine Abbildung $\Phi : K^n \to K^n$ ist also in $\mathcal{A}$ genau dann wenn $\Phi = \tau \circ \rho$, wobei τ eine Translation ist und $\rho \in \mathrm{Aut}(K^n)$ ein K-linearer Automorphismus. Diese Zerlegung ist eindeutig.

(a) Seien $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{A}$, mit $\Phi_i = \tau_i \circ \rho_i$. Hierbei sei $\tau_i = \tau_{v_i}$ die Translation um den Vektor v_i. Man bestimme $\rho \in \mathrm{Aut}(K^n)$ und $v \in K^n$, so dass $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \tau_v \circ \rho$. Hieraus leite man ein notwendiges und hinreichendes Kriterium her für $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$.

(b) Sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ die Menge der Translationen in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist eine maximale abelsche Untergruppe von $\mathcal{A}$, d.h. $\mathcal{T}$ ist eine abelsche Untergruppe und für alle abelschen Untergruppen $\mathcal{T}'$ mit $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

(c) Sei $\mathcal{D} := \{\rho \in \mathcal{A} \,|\, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K : \rho(\vec{e}_i) = \alpha_i \vec{e}_i, \quad \rho : K^n \to K^n \text{ linear }\}$. Dabei sind $\vec{e}_i$ die die Vektoren der Standardbasis in K^n. Zeigen Sie: $\mathcal{D}$ ist eine maximale abelsche Untergruppe von $\mathcal{A}$.

1 P

Aufgabe 3
Man bestimme die Menge der Bewegungen des $\mathbb{R}^3$, die die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^t A x = 1\}$ invariant lassen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 P

Aufgabe 4

Sei $b \in \mathbb{R}^3$ beliebig und $A \in O(3)$ die Drehung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \ -\pi < \theta \leq \pi.$$

Man bestimme — in Abhängigkeit von b und θ — die elliptischen Paraboloide $P \subseteq \mathbb{R}^3$, die durch die Abbildung $\phi : x \mapsto \phi(X) = A \cdot x + b$ in sich selbst abgebildet werden.

(Man kann zunächst den Fall $b = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ betrachten.)

1 P

Aufgabe 5 (Punktesammelaufgabe)

Sei V ein endlichdimensionaler Hermitescher Vektorraum. Ein Endomorphismus $P \in \mathrm{End}(V)$ heißt *Ähnlichkeitstransformation*, wenn es ein $\beta \in \mathbb{C}$ gibt mit $P^*P = \beta \cdot \mathbb{E}_n$. Zeigen Sie, dass die drei folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) P ist eine Ähnlichkeitstransformation.

(ii) $P = \alpha \cdot Q$ für ein $Q \in U(n)$ und ein $\alpha \in \mathbb{C}$

(iii) $x \perp y \Rightarrow Px \perp Py$.