Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Lineare Algebra und analytische Geometrie II* - Sommer 2008

Abgabe 07.07.2008

Aufgabe 1
Gegeben sei eine Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Beweisen Sie, dass es genau zwei Punkte p und q im inneren der Ellipse mit folgender Eigenschaft gibt: Geht ein Strahl durch den Punkt p, so geht der an der Ellipse reflektierter Strahl durch den Punkt q. Reflektion erfolgt an der jeweiligen Tangentialgerade, nach dem Prinzip Einfallsswinkel (d.h. der Winkel des einfallenden Strahls mit der Tangente an die Quadrik in seinem Schnittpunkt mit dieser) gleich Ausfallswinkel.

1 P

Aufgabe 2
Welche (Teilstücke) von Kurven entstehen als Randkurven, wenn Sie einen sechskantigen Bleistift in der üblichen Weise kegelförmig anspitzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

1 P

Aufgabe 3
Berechnen Sie die affine Normalform der Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^4$, die durch die folgende Gleichung gegeben ist

$$2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + x_2^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2 + x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4 = 0,$$

bestimmen Sie die zugehörige Transformation $B(x) = Ax + b$, wobei $A \in Gl(4, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^4$.

1 P

Aufgabe 4
(a) Gegeben sei eine Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^n$. Sei $p \in Q$ ein regulärer Punkt. Zeigen Sie, dass die Schnittmenge zwischen der Tangentialebene T_pQ und der Quadrik wieder eine Quadrik in $T_pQ \cong \mathbb{R}^{n-1}$ ist.

(b) Seien Q und $\tilde{Q}$ zwei Quadriken, gegeben durch die Nullstellenmengen von $x^2 + y^2 - z^2 - 1$ und $x^2 - y^2 - z$. Zeigen Sie, dass alle Punkte von Q und $\tilde{Q}$ regulär sind.

(c) Bestimmen Sie die Schnittmengen zwischen den Quadriken aus (b) und deren Tangentialebenen. Was bedeutet das für die Quadriken?

1 P

Aufgabe 5 (Punktesammelaufgabe)
Sei $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0\}$ Bestimmen Sie die (euklidische) Normalform von Q, sowie die zugehörige Transformation $B(x) = Ax + b$ mit $A \in O(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Quadrik im ursprünglichen x-y-Koordinatensystem.