

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 18/19)
Übungsblatt 4

Abgabetermin: 19.11.2018 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer
und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Wir betrachten die Schwingung eines Pendels mit der Masse m , die an einem Faden der Länge ℓ hängt und beschreiben die Bewegung durch den Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ als Funktion der Zeit t . Die Komponente der an m angreifenden Schwerkraft in Richtung der Bahntangente ist $mg \sin \varphi$; dabei ist g die Fallbeschleunigung. Der Weg ist $\ell\varphi$, die Beschleunigung ist also $\ell\varphi''$. Begründen Sie warum die Gleichung

$$m\ell \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

gilt. Wir nehmen nun an, dass die Auslenkung φ so klein ist, dass man $\sin \varphi$ durch φ ersetzen kann. Lösen Sie die Gleichung

$$\ell \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0$$

mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = \epsilon$ und $\varphi'(0) = 0$. Berechnen Sie die Schwingungsdauer T .

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Berechnen Sie die allgemeine Lösung zu den Gleichungen in (a) und (b), und die spezielle Lösung in (c).

- (a) $xy'' + 5y' = x^2$ (*Hinweis:* Man setzt $u := y'$ und löst die Differentialgleichung in der Variablen u und x durch die Verwendung eines integrierenden Faktor).
- (b) $y'' + 2y' + 3y = 0$.
- (c) $y'' = y'e^y$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ beliebig und $\sigma(A)$ die Menge aller Eigenwerte von A . Gegeben sei eine Lösung $y(t)$ des folgenden Systems

$$y' = Ay.$$

Überprüfen Sie ob die folgenden Aussagen wahr sind:

- (a) Falls für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, dann folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$
- (b) Falls für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$, dann folgt $\sup_{t \geq 0} \|y(t)\| < \infty$.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an.

(a) $y'' - y' - 2y = 4x^2$

(b) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$