



Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematik für PhysikerInnen (Analysis III) (WS 18/19)
Übungsblatt 6

Abgabetermin: 3.12.2018 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie auf die Abgaben Ihren Namen, die Matrikelnummer
und Ihre Übungsgruppe drauf.

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Wir betrachten das DG System.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -h(x) - y \end{cases}$$

wobei die Funktion h lokal Lipschitz-stetig ist, mit $h(0)=0$ und $xh(x) > 0, \forall x \neq 0$. Sei $0 < k < 1$ Konstante. Überprüfen Sie, dass

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x \ y) \begin{pmatrix} k & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \int_0^x h(s) ds$$

eine starke-Lyapunov Funktion des DG Systems für die Ruhelage $(0, 0)$ ist. Zeigen Sie, dass die Stationäre Lösung $(0, 0)$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Gegeben sei das folgende System:

$$(*) \begin{cases} x' = y - (x^2 + y^2)x \\ y' = -x - (x^2 + y^2)y \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt des Systems ist und linearisieren Sie die Gleichung in $(0, 0)$. Ist das lineare System stabil, asymptotisch stabil oder instabil?
- Zeigen Sie, dass für jede Lösung $(x(t), y(t))$ von $(*)$ mit $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$ gilt

$$\frac{d}{dt} (x(t)^2 + y(t)^2) < 0.$$

Ist $(0, 0)$ eine stabile, asymptotisch stabile oder eine instabile Ruhelage des Systems?

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Berechnen Sie die Green'sche Funktion für

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = 0 = u'(1). \end{cases}$$

Aufgabe 4

(6 Punkte)

Lösen Sie die inhomogene DG

$$u'' + u = e^x \quad \text{auf } [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0$$

mittels einer Green'schen Funktion.