MSG-Hausaufgaben Blatt 7

Zum 30.01.2017

Aufgabe 1. Sei a_n eine arithmetische Folge erster Ordnung, das heißt, a_n ist rekursiv definiert durch $a_n = a_{n-1} + d$, wobei das erste Folgenglied a_0 und die Differenz d vorgegebene (reelle) Zahlen sind.

a) Gib eine Formel für das n-te Folgenglied a_n an.

b) Zeige, dass jedes Folgenglied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbaren ist, das heißt:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Aufgabe 2. In der Stunde haben wir festgestellt, dass die explizite Bildungsvorschrift einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Differenzenschema ermittelt werde kann. Mit $a_0^(i)$ bezeichnen wir das 0-te Folgenglieder der i-ten Differenzenfolge. Wenn die k-te Differentenfolge konstant ist, so gilt die explizite Bildungsvorschrift

$$a_n = a_0^{(k)}\binom{n}{k} + a_0^{(k-1)}\binom{n}{k-1} + \ldots + a_0^{(2)}\binom{n}{2} + a_0^{(1)}n + a_0. \qquad (*)$$

a) Zeige, dass die zweite Differenzenfolge der Folge $a_n = n^2$ konstant ist. Berechne $a_0, a_0^{(1)}$ und $a_0^{(2)}$.

b) Folgere aus $(*)$ dass wenn die zweite Differenzenfolge konstant ist und $a_0, a_0^{(1)}$ und $a_0^{(2)}$ so sind wie in a) berechnet sind, dann $a_n = n^2$ ist.

c) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch $b_0 = 0$ und $b_n = b_{n-1} + n^2$. Ermittle das Differenzenschema von b_n. Ist b_n eine arithmetische Folge k-ter Ordnung? Für welches k?

d) Benutze $(*)$ um eine Formel für das n-te Folgenglied b_n zu bestimmen.

Aufgabe 3. Schreibe das Differenzenschema der Folge $a_n = 2^n$ auf. Was stellst du fest?
Wie sieht das Differenzenschema der Folge $a_n = c^n$ aus, wenn c eine beliebige ganze Zahl ist?

Leiter: Anastasia Prokudina, Simone Zahn
Webseite: https://www2.mathematik.hu-berlin.de/∼prokudia/
Ort und Zeit: Rudower Chaussee 25, Raum 1.114, Dienstags 16:00-17:30