

## Wissenschaftliches Rechnen I, WS 2005, Übungsaufgaben

### Hinweise zu den Übungen

In diesem Fach werden die Lösungen der Aufgaben nicht auf Papier, sondern elektronisch eingereicht. Es sind also ein paar Regeln einzuhalten:

Auf der **Einschreibliste** ist von mir (farbig) zweistellige Zahlen eingetragen worden. Notieren Sie sich bitte die Zahl in der Zeile, wo Sie sich eintragen, sagen wir XY, sie dient in diesem Kurs zu Ihrer Identifizierung.

Sie werden ermuntert (gebeten), die Lösungen der Übungsaufgaben in Gruppen zu erarbeiten. Wenn also eine Gruppe aus den StudentInnen AB, MN, XY besteht, so ist diese durch die Folge ABMNXY identifiziert, wobei die Nummern geordnet sein sollen (031567, aber nicht 150367).

Ihre Programmtexte editieren Sie bitte in einem der Home-Verzeichnisse der Beteiligten (es macht wenig Sinn, wenn mehrere dieselbe Datei bearbeiten) und kopieren diese nach Fertigstellung in Ihr Home-Verzeichnis.

Vor der *ersten* „Abgabe“ erstellen Sie bitte *einmalig* ein ihrer Gruppe entsprechendes Unterverzeichnis bei mir wie folgt:

```
cd ~hgrass-p/wr05
```

```
mkdir ABMNXY
```

Um mir dorthin Zugang zu verschaffen, ändern Sie die Rechte wie folgt:

```
chmod 755 ABMNXY
```

Das ist die Vorbereitung.

Unter `~hgrass-p/wr05/ABMNXY/` kopieren Sie dann immer Ihre Lösungen:

```
cp a01.java ~hgrass-p/wr05/ABMNXY/
```

und ändern auch hier die Rechte:

```
chmod 755 *
```

In der Datei ERGEBNISSE finden Sie dann die Bemerkungen zu Ihren Lösungen.

Untergliederte Aufgaben sollen in *eine* Programm-Datei aufgenommen werden, ggf. kann durch einen Dialog der nächste Teilschritt angefordert werden.

Damit ich die Dateien schnell finden kann, benennen Sie diese wie folgt: `a01.java`, ... , `a24.java`, ... Es sind mindestens 100 Punkte zu erreichen (die Aufgaben können beliebig gewählt werden).

Zur Ein- und Ausgabe verwenden Sie doch einfach die in der Klasse `B.java` im Paket `HUMath.Algebra` bereitgestellten Methoden.

Wenn sich die Zusammensetzung Ihrer Gruppe ändert, sagen Sie mir bitte Bescheid.

## 1. Rechnergenauigkeit

(a) Dividieren Sie  $x$ , beginnend mit  $x = 1$ , fortlaufend durch 2, bis  $x = 0$  ist. Wieviele Schritte braucht das? Bilden Sie  $y = 1 + x$ , bis  $y = 1$  wird, mit jeweils halbiertem  $x$ . Wieviele Schritte braucht das? Warum gibt es Unterschiede?

(b) „Berechnen“ Sie den Wert der (divergenten) Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ .

(c) Überprüfen Sie die Gleichung  $\frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{b}$  für  $a = 1000$ ,  $b = 0.001$ . (5)

## 2. Fingerübungen

(a) Schreiben Sie ein Programm, bei dem der Rechner sich eine Zahl zwischen 0 und 1000 „denkt“ und der Nutzer die Zahl erraten soll. Auf jeden Tip soll die Antwort „größer“ oder „kleiner“ gegeben werden. Das Programm soll schließlich die Leistung des Nutzers bewerten.

Denken Sie sich eine Zahl und lassen Sie den Rechner raten.

(b) Schreiben Sie ein Programm, das alle dreistelligen Zahlen mit den Ziffern 1, 3, 5, 7 ausgibt. Wählen Sie die Ausgabe so, daß alle Ziffern gleichzeitig auf dem Bildschirm sichtbar sind.

(c) Weihnachten: Schreiben Sie ein Programm, das Tannenbäume mit vom Nutzer einzugebender Höhe (im Textmodus) druckt.

(d) Für welche natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $n + \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2} = 2^{n-1}$  ?

(e) Taschenrechner berechnen die Werte der Sinusfunktion im Bereich  $0 \leq x \leq \pi/4 = 0.8$  mittels  $\sin(x) = ((x^2/20 + 1)^{-1} \cdot 10 - 7) \cdot x/3$  bzw. durch  $((x^2/42 + 1)^{-1} \cdot 21 - 11) \cdot x^2/(-60) + 1) \cdot x$ . Durchforsten Sie das Intervall in 1/10-Schritten und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Math.sin-Berechnung. (10)

3. Berechnen Sie  $\sqrt[3]{a}$  mittels Quadratwurzeln: Sei  $x^3 = a$ , dann ist  $x^4 = a \cdot x$ , also  $x^2 = \sqrt{ax}$  und  $x = \sqrt{\sqrt{ax}}$ . Wählen Sie also irgendein (?)  $x_0$  und iterieren Sie  $x_{i+1} = \sqrt{\sqrt{ax_i}}$ . (3)

4. Bestimmen Sie  $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$  für  $x = \pm 40$ . Vergleichen Sie die Ergebnisse mit  $\exp(x)$  bzw.  $1/\exp(-x)$ . Halten Sie fest, welches das absolut größte Reihenglied war. Berechnen Sie jeden Summanden aus dem vorangehenden (!) Woher kommen die offensichtlichen Fehler? (3)

5. Die  $\Gamma$ -Funktion wird wie folgt definiert:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1) \cdots (x+n)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Überprüfen Sie, für welche Werte von  $n$  der obige Bruch eine vernünftige Näherung darstellt. Zur Probe: Wenn  $n$  eine natürliche Zahl ist, gilt  $\Gamma(n) = n!$ . (4)

6. „Zufallszahlen“: Wir setzen  $A = 12345$  (oder ein anderer Anfangswert) und  $M = 899$  (oder eine andere Zahl) und iterieren  $A = A * M$ . Wenn  $A$  negativ wird, so addieren wir  $2^{15}$ . Die Folge wird periodisch. Probieren Sie  $A$ s und  $M$ s aus, so daß die Periode möglichst lang wird. (4)

7. **Symbolisches Rechnen** Verwenden Sie die Polynomarithmetik aus der Klasse DX.java.

- (a) Die Tschebyscheff-Polynome  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ , ( $-1 \leq x \leq 1$ ) erfüllen die Rekursionsformel

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Berechnen Sie diese Polynome mittels der Rekursionsformel.

- (b) Die Bernsteinpolynome  $n$ -ter Stufe sind durch die Formeln

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$

gegeben und erfüllen die Rekursionsformeln

$$B_i^n(x) = (1-x)B_i^{n-1}(x) + xB_{i-1}^{n-1}(x)$$

mit  $B_0^0(x) = 1$ .

Berechnen Sie diese Polynome mittels der Rekursionsformel.

Überprüfen Sie die Relation  $\sum_{i=0}^n B_i^n(x) = 1$ . (8)

8. Sei  $G = \{1, 2, 3, 4\}$ ; die folgenden Tabellen definieren in  $G$  Multiplikationen  $\circ, \star, *$ . Offenbar ist 1 jeweils das neutrale Element und jedes Element besitzt ein Inverses. Welche Multiplikationen definieren Gruppen? (5)

$\circ$	1	2	3	4	$\star$	1	2	3	4	$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4	1	1	2	3	4	1	1	2	3	4
2	2	1	4	3	2	2	4	1	3	2	2	3	4	1
3	3	4	1	2	3	3	1	4	2	3	3	4	1	2
4	4	3	2	1	4	4	3	2	1	4	4	1	2	3

9. Ein Tripel  $(a, b, c)$  natürlicher Zahlen heißt primitives pythagoräisches Tripel, wenn  $a^2 + b^2 = c^2$ ,  $\text{ggT}(a, b, c) = 1$  gilt und  $a$  gerade ist. Nach Euler erhält man all diese Tripel wie folgt:

Seien  $u > v > 0$  natürliche Zahlen, die nicht beide ungerade sind, dann setze man  $a = 2uv$ ,  $b = u^2 - v^2$ ,  $c = u^2 + v^2$ . (Wegen der ggT-Bedingung können  $u, v$  auch nicht beide gerade sein.)

Sei  $P(n)$  die Zahl dieser Tripel mit  $c \leq n$ . Bestimmen Sie experimentell das Verhältnis  $\frac{P(n)}{n}$ . Antwort von Lehmer (1900): Der Grenzwert ist  $\frac{1}{2\pi}$ . (6)

## 10. Teiler

- (a) Geben Sie für eine eingegebene Zahl alle Teiler an.
- (b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen. Wie viele Rechenoperationen brauchen Sie?
- (c) Berechnen Sie die Summe  $s(x)$  aller von  $x$  verschiedenen Teiler der Zahl  $x$ . Überprüfen Sie, ob die Zahl  $x$  eine vollkommene Zahl ist (d.h.  $s(x) = x$ , z.B.  $s(6) = 1 + 2 + 3 = 6$ ). Es gibt wahrscheinlich keine ungeraden vollkommenen Zahlen.

(d) Zwei Zahlen  $x$  und  $y$  heißen befreundet, wenn  $s(x) = y$  und  $s(y) = x$  gilt. Suchen Sie Paare befreundeter Zahlen (manche sind mit sich selbst befreundet).

(8)

11. In den drei int-Werten 844785079, 1085704525, -1020975591 sind die 43 Primzahlen zwischen 3 und 193 als Bitfolge (96 Bit) kodiert. Rekonstruieren Sie diese Primzahlen.

(6)

## 12. Primzahlen

(a) Euklid: Sei  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5, \dots$  die Folge der Primzahlen.

Für welche Werte von  $n$  ist  $\prod_{i=1}^n p_i + 1$  eine Primzahl, für welche nicht?

nicht prim für 13, prim für 31, 379, 1019, 1021, 2657

(b) Mersenne-Zahlen: Für welche Primzahlen  $p < 100$  ist  $2^p - 1$  keine Primzahl?

prim für 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89

(c) Fermat-Zahlen: Suchen Sie die kleinste Zahl der Form  $2^{2^n} + 1$ , die keine Primzahl ist.

(d) Euler: Für welche Zahlen  $n < 100$  ist  $n^2 + n + 41$  eine Primzahl?

(10)

13. Bestimmen Sie die Längen der Perioden in der Dezimalbruchdarstellung der Zahl  $\frac{1}{p}$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist.

(3)

14. **Binäre Division mit Rest:** Seien  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen. Wenn der Quotient und der Rest bei  $a/2b$  bekannt ist, so erhält man Quotienten und Rest von  $a/b$  wie folgt (es gilt  $a = 2b \cdot q + r$ ,  $0 \leq r < 2b$ ):

wenn  $r < b$ , so  $a = b \cdot 2q + r$ , also Quotient =  $2q$ , Rest =  $r$ .

wenn  $r \geq b$ , so  $a = b \cdot (2q + 1) + r - b$ , also Quotient =  $2q + 1$ , Rest =  $r - b$ .

Bestimmen Sie allein unter Verwendung der Addition und der Verdopplung Quotient und Divisionsrest zweier gegebener Zahlen.

Beispiel:  $a = 100$ ,  $b_0 = 7$ ,  $b_1 = 14$ ,  $b_2 = 28$ ,  $b_3 = 56$ ,  $b_4 = 112 > a$ , nun beginnt der obige Algorithmus:  $q_4 = 0$ ,  $r_4 = 100 > b_3$ ,  $q_3 = 1$ ,  $r_3 = 44 > b_2$ ,  $q_2 = 3$ ,  $r_2 = 16 > b_1$ ,  $q_1 = 7$ ,  $r_1 = 2 < b_0$ ,  $q_0 = 14$ ,  $r_0 = 2$ . (5)

15. Schreiben Sie eine Prozedur  $\text{split}(a, n, b)$ , so daß bei einer gegebenen natürlichen Zahl  $a = 2^n b$  der Zweierexponent  $n$  und der ungerade Anteil  $b$  bestimmt werden. Verwenden Sie  $\text{split}$  zur  $\text{ggT}$ -Berechnung ohne Divisionen:

$$\text{ggT}(2^n x, 2^m y) = 2^{\min(n,m)} \cdot \text{ggT}(x, y - x).$$

(Sei etwa  $y > x$ .) Beachten Sie, daß  $y - x$  eine gerade Zahl ist. (4)

16. Verwenden Sie die Beziehung

$$\text{ggT}(x_1, \dots, x_n) = \text{ggT}(x_1 \bmod x_i, \dots, x_i, \dots, x_n \bmod x_i),$$

falls  $x_i \neq 0$  ist. Bestimmen Sie  $\text{ggT}(20604, 53227, 25755, 20927, 78421)$ . (3)

17. (a) Zählen Sie alle Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  auf; deren Menge wird mit  $S_n$  bezeichnet.  
 (b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix  $A = (a_{ij})$  :

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdots a_{n,p(n)}. \quad (6)$$

18. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks sollen eingegeben werden. Ihr Programm soll entscheiden, ob es sich ggf. um ein gleichschenkliges, gleichseitiges, rechtwinkliges, ... Dreieck handelt und seinen Flächeninhalt berechnen. (2)

19. Im Kreis stehen die Kinder  $1, 2, \dots, n$ . Nach einem  $m$ -silbigen Abzählreim scheidet das jeweils  $m$ -te Kind aus, bis niemand mehr im Kreis steht. Ein Programm soll bei vorgegebenen  $n, m$  die Reihenfolge des Ausscheidens ausgeben. Beispiel: Bei  $n = 6, m = 5$  ergibt sich  $5, 4, 6, 2, 3, 1$ . (4)

20. Auf einem Schachbrett sind 8 Damen so aufzustellen, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Implementieren Sie folgenden Algorithmus:

0. Stelle in Reihe a eine Dame auf a1.
1. Stelle in der nächsten Reihe eine Dame auf das erste mögliche freie Feld (im ersten Schritt also b3).
2. Wiederhole Schritt 1, solange es geht.
3. Wenn die letzte Reihe (h) erreicht ist, so hat man eine gültige Stellung gefunden. Die nächste Stellung findet man, indem man die Dame in Reihe h auf das nächste freie Feld setzt.
4. Wenn es in einer Reihe kein freies Feld mehr gibt, geht man eine Reihe zurück und sucht dort das nächste freie Feld.
5. Das Ende ist erreicht, wenn es für die Dame in Reihe a kein freies Feld mehr gibt.

Wieviele Stellungen gibt es? <sup>1</sup> (10)

21. **Faktorisierung nach Fermat:** Sei  $n = ab$ ,  $a > b$  ungerade. Wir setzen

$$x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}, \text{ dann ist } n = ab = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

Beginnend bei  $x = \sqrt{n}$  erhöhen wir  $x$ , bis  $x^2 - n = y^2$  ein Quadrat ist. Dann haben wir eine Zerlegung von  $n$  gefunden.

Man braucht noch eine Funktion, die die Wurzel aus einer natürlichen Zahl zieht. Verwenden Sie dazu die Iteration  $y_{n+1} = \frac{1}{2} \left( y_n + \frac{y}{y_n} \right)$ .

(4)

22. Schreiben Sie ein Programm, das seinen eigenen Quelltext auf den Bildschirm ausgibt, ohne diesen von einer Datei zu lesen. <sup>2</sup> (10)

23. **Goldbachsche Vermutung:** Überprüfen Sie, ob jede gerade natürliche Zahl  $> 2$  die Summe zweier Primzahlen ist. Jede ungerade natürliche Zahl  $> 9$  ist Summe dreier ungerader Primzahlen (?)

Überprüfen Sie die Zahlen bis etwa 200. (5)

---

<sup>1</sup>Diese Aufgabe wurde im Jahre 1848 in einer Schach-Zeitung gestellt. Gauß fand 72 Lösungen, im Jahre 1850 war die korrekte Lösungsanzahl bekannt.

<sup>2</sup>vgl. M. Ende, Die unendliche Geschichte, Kapitel L

24. **Problem von Syracuse, ungelöst:** Sei  $x$  eine natürliche Zahl. Wenn  $x$  gerade ist, wird es durch 2 geteilt. Wenn  $x$  ungerade ist, so wird es durch  $3x + 1$  ersetzt. Behauptung: Nach endlich vielen Schritten wird  $x = 1$ . Programmieren Sie das Verfahren rekursiv. Was kann passieren, wenn die Behauptung nicht wahr ist? (4)
25. Implementieren Sie Bubblesort und Quicksort. Vergleichen Sie die Laufzeiten. Stellen Sie die Sortiervorgänge grafisch dar. (12)
26. Bestimmung reeller Nullstellen reeller Polynome. Nutzen Sie `B.gr()` zur Veranschaulichung. (8)
27. **Goldener Schnitt**<sup>3</sup> Sei  $F_n$  die  $n$ -te Fibonacci-Zahl, dann konvergiert  $\frac{F_n}{F_{n-1}}$  gegen die Zahl des goldenen Schnitts. Wie berechnen Sie  $F_n$  schnell (und immer wieder)? (3)
28.  $s(n) = \sum_{i=1}^n i^2$  ist als Polynom in  $n$  vom Grad 3 mit rationalen Koeffizienten darstellbar. Bestimmen Sie dessen Koeffizienten. (5)
29. Geben Sie ein DM-Objekt im L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Stil aus. (3)
30. Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `a30.m`, das folgendes berechnet: Es seien zwei dreidimensionale Unterräume  $U_1, U_2$  des  $R^4$  durch Basen gegeben, es soll eine Basis von  $U_1 \cap U_2$  bestimmt werden. „Zufällige“ linear unabhängige Vektoren erhält man z.B. mit dem ATLAST-Skript `randintr(3,4,9,3)`, eine Basis des Nullraums einer Matrix  $A$  erhält man mit `nulbasis(A)`. Hinweis: Ein dreidimensionaler Unterraum des  $R^4$  läßt sich durch eine Gleichung beschreiben. (5)
31. Für jeden Winkel  $x$  gilt  $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ , diese Identität kann auch mittels der (formalen) Potenzreihen, die die Sinus- bzw. Kosinusfunktion darstellen, bewiesen werden. Nun sei  $X$  eine quadratische Matrix (also ein DM-Objekt). Wir definieren  $\sin(X)$  und  $\cos(X)$  durch ihre Potenzreihenentwicklung (die konvergieren zufriedenstellend, wenn die Einträge in  $X$  nicht zu groß sind). Überprüfen Sie die obige Relation. (8)

---

<sup>3</sup>Dan Brown: Sakrileg, Kapitel 20