

1 Aufgabenstellung

Ich habe mich entschieden, die zweite Aufgabe zu bearbeiten. Die Aufgabenstellung lautet:
Die Rekursionsformel zweiter Ordnung

$$y_n = \frac{10}{3}y_{n-1} - y_{n-2}, y_0 = 1, y_{-1} = 3$$

hat die exakte Lösung $y_n = 3^{-n}$.

Man berechne die y_n , $n_1(1)15$, mit 10(2)20 Stellen und begründe das instabile Verhalten (relativen Fehler ausgeben).

2 Programmablauf

Das Programm erzeugt nach dem Start folgende Ausgabe:

Wissenschaftliches Rechnen II
Loesung: Serie 1 - Aufgabe 2
Copyright (C) 2006 Yves Radunz

Mantissenlaenge = 10

n = 1 : rel. Fehler = 1.0E-9	f(n) = 0.3333333330
n = 2 : rel. Fehler = 1.0E-8	f(n) = 0.1111111100
n = 3 : rel. Fehler = 9.28E-8	f(n) = 0.0370370360
n = 4 : rel. Fehler = 8.353E-7	f(n) = 0.01234566870
n = 5 : rel. Fehler = 7.5178E-6	f(n) = 0.004115195400
n = 6 : rel. Fehler = 6.76603E-5	f(n) = 0.001371649300
n = 7 : rel. Fehler = 6.08943529E-4	f(n) = 0.0004569689330
n = 8 : rel. Fehler = 0.005480490403	f(n) = 0.0001515804770
n = 9 : rel. Fehler = 0.0493244135812	f(n) = 0.00004829932360
n = 10: rel. Fehler = 0.4439197241533	f(n) = 0.000009417268300
n = 11: rel. Fehler = 3.99527751989269	f(n) = -0.00001690842927
n = 12: rel. Fehler = 35.95749767623279	f(n) = -0.00006577869919
n = 13: rel. Fehler = 323.6174789823199	f(n) = -0.0002023539013
n = 14: rel. Fehler = 2912.5573105298417	f(n) = -0.0006087343051
n = 15: rel. Fehler = 26213.015793979244	f(n) = -0.001826760449

Mantissenlaenge = 12

n = 1 : rel. Fehler = 1.0E-11	f(n) = 0.333333333330
n = 2 : rel. Fehler = 1.0E-10	f(n) = 0.111111111100
n = 3 : rel. Fehler = 9.19E-10	f(n) = 0.0370370370030

n = 4 : rel. Fehler = 8.29E-9	f(n) = 0.0123456789100
n = 5 : rel. Fehler = 7.46371E-8	f(n) = 0.00411522603030
n = 6 : rel. Fehler = 6.71761E-7	f(n) = 0.00137174119100
n = 7 : rel. Fehler = 6.04589068E-6	f(n) = 0.000457244606360
n = 8 : rel. Fehler = 5.441303593E-5	f(n) = 0.000152407496870
n = 9 : rel. Fehler = 4.89717356302E-4	f(n) = 0.0000507803832060
n = 10: rel. Fehler = 0.00440745623965	f(n) = 0.0000168604471500
n = 11: rel. Fehler = 0.0396671062074967	f(n) = 0.00000542110729390
n = 12: rel. Fehler = 0.3570039559358317	f(n) = 0.00000120991049630
n = 13: rel. Fehler = 3.2130356035014755	f(n) = -0.00000138807230624
n = 14: rel. Fehler = 28.917320431560384	f(n) = -0.00000583681818376
n = 15: rel. Fehler = 260.25588388418623	f(n) = -0.0000180679883063

Mantissenlaenge = 14

n = 1 : rel. Fehler = 1.0E-13	f(n) = 0.333333333333330
n = 2 : rel. Fehler = 1.0E-12	f(n) = 0.111111111111100
n = 3 : rel. Fehler = 9.1E-12	f(n) = 0.037037037036700
n = 4 : rel. Fehler = 8.227E-11	f(n) = 0.012345679011330
n = 5 : rel. Fehler = 7.408E-10	f(n) = 0.0041152263344000
n = 6 : rel. Fehler = 6.667327E-9	f(n) = 0.0013717421033370
n = 7 : rel. Fehler = 6.000607E-8	f(n) = 0.00045724734339000
n = 8 : rel. Fehler = 5.40054757E-7	f(n) = 0.00015241570796300
n = 9 : rel. Fehler = 4.86049307122E-6	f(n) = 0.000050805016486660
n = 10: rel. Fehler = 4.374443809603E-5	f(n) = 0.000016934346992530
n = 11: rel. Fehler = 3.93699943378369E-4	f(n) = 0.0000056428068217730
n = 12: rel. Fehler = 0.003543299491273714	f(n) = 0.0000018750090800460
n = 13: rel. Fehler = 0.03188969542249125	f(n) = 6.0722344504690E-7
n = 14: rel. Fehler = 0.2870072588036085	f(n) = 1.4906907011030E-7
n = 15: rel. Fehler = 2.5830653292337598	f(n) = -1.1032654467924E-7

Mantissenlaenge = 16

n = 1 : rel. Fehler = 1.0E-15	f(n) = 0.333333333333330
n = 2 : rel. Fehler = 1.0E-14	f(n) = 0.111111111111100
n = 3 : rel. Fehler = 9.28E-14	f(n) = 0.03703703703703360
n = 4 : rel. Fehler = 8.407E-13	f(n) = 0.01234567901233530
n = 5 : rel. Fehler = 7.5718E-12	f(n) = 0.004115226337417400
n = 6 : rel. Fehler = 6.814927E-11	f(n) = 0.001371742112389370
n = 7 : rel. Fehler = 6.13347958E-10	f(n) = 0.0004572473705471660
n = 8 : rel. Fehler = 5.520133963E-9	f(n) = 0.0001524157894345170
n = 9 : rel. Fehler = 4.96812099763E-8	f(n) = 0.00005080526090122390
n = 10: rel. Fehler = 4.471308960643E-7	f(n) = 0.00001693508023622930
n = 11: rel. Fehler = 4.02417807203728E-6	f(n) = 0.000005645006552873760
n = 12: rel. Fehler = 3.62176026557941E-5	f(n) = 0.000001881608273349900
n = 13: rel. Fehler = 3.259584239111998E-4	f(n) = 6.270210249592390E-7
n = 14: rel. Fehler = 0.0029336258152114453	f(n) = 2.084618098475630E-7
n = 15: rel. Fehler = 0.026402632336914613	f(n) = 6.785167453263760E-8

Mantissenlaenge = 18

n = 1 : rel. Fehler = 5.0E-16	f(n) = 0.333333333333333500
n = 2 : rel. Fehler = 5.48E-15	f(n) = 0.111111111111111720
n = 3 : rel. Fehler = 5.0813E-14	f(n) = 0.0370370370370389190
n = 4 : rel. Fehler = 4.5935E-13	f(n) = 0.0123456790123513500
n = 5 : rel. Fehler = 4.1366933E-12	f(n) = 0.00411522633746558310
n = 6 : rel. Fehler = 3.72332933E-11	f(n) = 0.00137174211253392770
n = 7 : rel. Fehler = 3.351032036E-10	f(n) = 0.000457247370980842800
n = 8 : rel. Fehler = 3.01593292118E-9	f(n) = 0.000152415790735548380
n = 9 : rel. Fehler = 2.7143400878036E-8	f(n) = 0.0000508052648043184920
n = 10: rel. Fehler = 2.44290612962132E-7	f(n) = 0.0000169350919455132680
n = 11: rel. Fehler = 2.1986155222209123E-6	f(n) = 0.00000564504168072573750
n = 12: rel. Fehler = 1.9787539706028233E-5	f(n) = 0.00000188171365690585790
n = 13: rel. Fehler = 1.780878573607937E-4	f(n) = 6.27337175627122480E-7
n = 14: rel. Fehler = 0.0016027907162541929	f(n) = 2.09410261851217140E-7
n = 15: rel. Fehler = 0.014425116446295287	f(n) = 7.06970305436013550E-8

Mantissenlaenge = 20

n = 1 : rel. Fehler = 5.0E-16	f(n) = 0.33333333333333350000
n = 2 : rel. Fehler = 5.4998E-15	f(n) = 0.11111111111111172220
n = 3 : rel. Fehler = 5.099795E-14	f(n) = 0.037037037037038925850
n = 4 : rel. Fehler = 4.6098134E-13	f(n) = 0.012345679012351370140
n = 5 : rel. Fehler = 4.151331863E-12	f(n) = 0.0041152263374656433410
n = 6 : rel. Fehler = 3.7364986421E-11	f(n) = 0.0013717421125341083490
n = 7 : rel. Fehler = 3.362883773912E-10	f(n) = 0.00045724737098138471760
n = 8 : rel. Fehler = 3.0265993960712E-9	f(n) = 0.00015241579073717411920
n = 9 : rel. Fehler = 2.723939906427062E-8	f(n) = 0.000050805264809195705140
n = 10: rel. Fehler = 2.451545965780136E-7	f(n) = 0.000016935091960144906400
n = 11: rel. Fehler = 2.206391374701668E-6	f(n) = 0.0000056450417246206523490
n = 12: rel. Fehler = 1.9857522378314646E-5	f(n) = 0.0000018817137885906023710
n = 13: rel. Fehler = 1.7871770141133153E-4	f(n) = 6.2733757068135586800E-7
n = 14: rel. Fehler = 0.001608459312708984	f(n) = 2.0941144701391729360E-7
n = 15: rel. Fehler = 0.014476133814388356	f(n) = 7.0700586031701812240E-8

Hierbei wird für jede Mantissenlänge von 10 bis 20 (in Zweierschritten) und für jede Rekursionstiefe (1 bis 15) der relative Fehler und der berechnete Wert von 3^{-n} angegeben.

3 Auswertung

Auffällig ist vor allem der relative Fehler von über 26.000 bei der Berechnung von 3^{-15} bei einer Mantissenlänge von weniger als 14 Stellen. Dieser liegt zunächst darin begründet, dass ein (in der hier gewählten Zahlendarstellung nicht vermeidbarer) Fehler in den letzten Stellen der Zahl durch den Summanden $\frac{10}{3}y_{n-1}$ in der Rekursionsvorschrift bei jedem Berechnungsschritt ungefähr verdreifacht wird. Außerdem wird gleichzeitig der Sollwert gedrittelt, wodurch der relative Fehler bei jedem Schritt um etwa den Faktor 10 ansteigt.

Die größere Mantissenlänge in den letzten beiden Beispielen (18, bzw. 20) zeigt jedoch, dass auch bei einer längeren Mantisse schon bei $n=15$ relative Fehler von mehr als einem Prozent auftreten. Diese sind im Vergleich zu den Fehlern der Mantissenlängen 10 bzw. 12 vergleichsweise gering.

Dies liegt darin begründet, dass bei einer Vergrößerung der Mantisse um eine weitere Stelle der anfängliche Fehler um den Faktor 10 reduziert wird. Diese Veränderung des Fehlers setzt sich linear während der rekursiven Berechnung von 3^{-15} fort, wodurch auch letztendlich der relative Fehler bei $n=15$ um den Faktor 10 reduziert wird.