1 Aufgabenstellung

Ich habe mich entschieden, die vierte Aufgabe zu bearbeiten. Die Aufgabenstellung lautet:

Für $0 < x \ll 1, M > 1000$ (ganzzahlig), vergleiche man den analytischen Wert für $\cos((M+1)x)$ mit den beiden iterativ berechneten Werten nach den Vorschriften
a) $cos((m+1)x) = 2cos(x)cos(mx) - cos((m-1)x)$
b) $cos((m+1)x) = cos(x)cos(mx) - sin(x)sin(mx)$ mit
$sin((m+1)x)) = sin(x)cos(mx) + cos(x)sin(mx)$ und m=1(1)M.
Implementieren Sie beide Vorschriften ohne und in einem weiteren Programm mit rekursivem Funktionsaufruf!

2 Programmablauf

Das 1. Programm erzeugt nach dem Start folgende Ausgabe:

```
Wissenschaftliches Rechnen II
Loesung: Serie 2 - Aufgabe 4
Copyright (C) 2006 Yves Radunz

1. Programm
Iterative Berechnung von cos((M+1)x)
Getestet werden: x=0.00001, M=10000(10000)(50000)

1. iterative Berechnungsvorschrift
M       cos((M+1)x)             cos1((M+1)x)            relativer Fehler
10000   0.9950031668941091      0.9950031664541159      4.42202766445904E-10
20000   0.9800645910989304      0.9800645894329121      1.699906657611742E-9
30000   0.9553335338757726      0.9553335302491939      3.796138809547472E-9
40000   0.921057099773409       0.9210570934439546      6.871945731266668E-9
50000   0.8775777675911076      0.8775777578446686      1.1106068714530383E-8

2. iterative Berechnungsvorschrift
M       cos((M+1)x)             cos2((M+1)x)            relativer Fehler
10000   0.9950031668941091      0.9950031668940712      3.804872828484862E-14
20000   0.9800645910989304      0.9800645910988552      7.669096450351814E-14
30000   0.9553335338757726      0.9553335338756592      1.1865360818472905E-13
40000   0.921057099773409       0.9210570997732572      1.6477532989387466E-13
50000   0.8775777675911076      0.8775777675909328      1.9925314067429207E-13
```

Das 2. Programm (mit der rekursiven Implementierung) erzeugt nach dem Start folgende Ausgabe:

```
Wissenschaftliches Rechnen II
Loesung: Serie 2 - Aufgabe 4
Copyright (C) 2006 Yves Radunz

2. Programm
Rekursive Berechnung von cos((M+1)x)
Die Berechnung ist fuer groessere Werte von M rekursiv nicht
moeglich, da zu viele (ueberfluessige) Berechnungen
von Zwischenergebnissen durchgefuehrt werden.
Daher wurden die Berechnungsvorschriften nur
implementiert und nicht ausgefuehrt.
```

Diese Ausgabe ist nur als Hinweis für den Benutzer enthalten, da (wie bereits im Programm geschrieben) zu viele Zwischenergebnisse mehrfach berechnet werden. Dadurch entsteht eine Zeitkomplexität in der Größenordung von $O(2^M)$. Für die geforderten Dimensionen von M(größer als 1000) ist die Berechnung mit der rekursiven Vorschrift praktisch nicht mehr möglich. Daher habe ich sie nur implementiert und nicht vom Programm ausführen lassen.

3 Auswertung

Wie erwartet steigt der relative Fehler des Ergebnisses für steigendes M an.
Dieser liegt bei etwa $4.42 \cdot 10^{-10}$ (M=10000) und $1.11 \cdot 10^{-8}$ (M=50000) bei der ersten Berechnungsvorschrift, bzw. bei $3.8 \cdot 10^{-14}$ (M=10000) und $1.99 \cdot 10^{-13}$ (M=50000) bei der zweiten Vorschrift.
Ebenfalls fällt auf, dass der Fehler bei der zweiten Berechnungsvorschrift viel kleiner ist, als der Fehler, der bei Verwendung der ersten Berechnungsvorschrift auftritt. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass die Berechnung in der Vorschrift 1 in jedem Schritt eine Subtraktion von positiven, betragsmäßig etwa gleich großen Zahlen durchführt. Dabei tritt bekanntermaßen ein größerer relativer Fehler auf, als bei der Addition positiver, betragsmäßig gleich großer Zahlen. Letztere tritt jedoch bei der Verwendung der Berechnungsvorschrift b) in der Hälfte der Fälle (Definition von sin((m+1)x)) auf.
Weil das erste Verfahren in jedem Iterationsschritt schlecht konditionierte Berechnungen verwendet, tritt verständlicher Weise bei Verwendung dieses Berechnungsverfahrens ein größerer Fehler auf, der sich stärker als bei der Verwendung der zweiten Berechnungsvorschrift fortpflanzt.