Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

04.07.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 11. Serie –

11.1 Sei $f : \overline{B_R(z_0)} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph in $B_R(z_0)$. Beweisen Sie die folgende Variante der CAUCHYschen Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \quad \forall\, z \in B_R(z_0),$$

wobei $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. 3 P

11.2 Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} \, \mathrm{d}z,$$

wobei $\gamma(t) = 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. 2 P

10.3 Bestimmen Sie das Maximum von $z \mapsto |e^{z^2}|$ auf $\overline{B_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$. 2 P

10.4 Sei f holomorph in $\mathbb{C}$. Es gelte

$$\operatorname{Re} f(z) \leq M = \text{const} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Beweisen Sie: $f \equiv \text{const}$. 3 P

[*Hinweis*: Betrachte $F(z) = e^{f(z)}$, $z \in \mathbb{C}$.]

10.5 Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < 2\}$. Sei f stetig in $\bar{D}$, holomorph in D und sei

$$|f(z)| \leq 1 \quad \forall\, |z| = 1, \quad |f(z)| \leq 4 \quad \forall\, |z| = 2.$$

Beweisen Sie: $|f(z)| \leq |z|^2 \quad \forall\, z \in \bar{D}$. 3 P

[*Hinweis*: Betrachte $g(z) := \dfrac{f(z)}{z^2}$, $z \in \bar{D}$.]

10.6 Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Beweisen Sie:

Sei (f_n) eine Folge von in $\bar{D}$ stetigen, in D holomorphen Funktionen, die auf ∂D gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergieren. Dann existiert eine stetige Funktion f in $\bar{D}$, die in D holomorph ist, so daß $f_n \to f$ gleichmäßig in $\bar{D}$ und $f = g$ auf ∂D gilt. 4 P

Abgabe: 16.07.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis 11:15 Uhr)