Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

25.06.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 10. Serie –

10.1 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Bestimmen Sie alle Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f \quad \text{differenzierbar in } D \quad \text{und} \quad \bar{f} \quad \text{differenzierbar in } D. \qquad 3\,\mathrm{P}$$

10.2 Sei $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Berechnen Sie folgende Integrale für $|z| < 1$:

$$1^\circ \quad \int_\gamma \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad 2^\circ \quad \int_\gamma \frac{\operatorname{Re}\zeta}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad 3^\circ \quad \int_\gamma \frac{2i\operatorname{Im}\zeta}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta. \qquad \text{je } 2\,\mathrm{P}$$

10.3 Berechnen Sie mit Hilfe der CAUCHYschen Integralformel die folgende Integrale:

1) $$\int_\gamma \frac{\sin\zeta}{\zeta + i}\,\mathrm{d}\zeta, \quad \text{wobei } \gamma(t) = 2e^{it}\ (t \in [0, 2\pi]), \qquad 1\,\mathrm{P}$$

2) $$\int_\gamma \frac{1}{\zeta^2 + \pi^2}\,\mathrm{d}\zeta, \quad \text{wobei } \gamma(t) = -2i + 3e^{it}\ (t \in [0, 2\pi]). \qquad 2\,\mathrm{P}$$

10.4 Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei (f_n) eine auf D definierte Folge holomorpher Funktionen, die in D lokal gleichmäßig gegen f konvergieren, d. h.

$$\forall\, z_0 \in D \quad \exists r_0 = r_0(z) > 0 : \quad \overline{B_{r_0}(z_0)} \subset D,\ f_n \to f \text{ gleichmäßig in } \overline{B_{r_0}(z_0)}.$$

Zeigen Sie: f ist holomorph in D und alle Ableitungen $f_n^{(k)}$ konvergieren in D lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$. 4 P

Hinweis: Satz von MORERA.

10.5 (CAUCHY*sche Ungleichungen*) Seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\overline{B_r(z_0)} \subset D$. Dann gilt für alle $0 < \rho < r$:

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{rk!}{(r-\rho)^{k+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \quad \forall\, z \in B_\rho(z_0). \qquad 4\,\mathrm{P}$$

Abgabe: 04.07.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis 11:15 Uhr)