Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

23.04.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 2. Serie –

2.1 Sei X eine Menge, die mehr als zwei Elemente enthält. Sei

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset, \\ 1 & \text{falls } A \subset X,\ A \neq \emptyset,\ A \neq X, \\ 2 & \text{falls } A = X. \end{cases}$$

1) Zeigen Sie: μ^* ist äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$; 2P

2) geben Sie die Mengen $A \subseteq X$ an, die μ^*-meßbar sind. 2P

2.2 Sei μ^* äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Sei $A \subseteq X$ eine μ^*-meßbare Menge. Beweisen Sie:

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \quad \forall\, B \subseteq X.$$

3P

2.3 DEFINITION. *Ein äußeres Maß μ^* auf $\mathcal{P}(X)$ heißt* **regulär**, *wenn für jedes $A \subseteq X$ eine μ^*-meßbare Menge $B \supseteq A$ existiert, so daß: $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.*

1) Beweisen Sie: Für ein äußeres Maß μ^* auf $\mathcal{P}(X)$ sind äquivalent:

   1° μ^* ist regulär:

   2° $\forall\, A \subseteq X$ gilt: $\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(C) \mid A \subseteq C,\ C \in \mathcal{A}_{\mu^*}\}$. 2P

2) Sei μ^* reguläres äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, so daß

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \subseteq \mathcal{A}, \quad \mu^*|_{\mathcal{A}} \quad \text{ist Maß auf } \mathcal{A}.$$

   Beweisen Sie: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mu^*}$
   (d.h. für ein reguläres äußeres Maß μ^* ist $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die **größte** σ-Algebra, auf der μ^* ein Maß ist). 3P

3) Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring, sei μ Inhalt auf $\mathcal{R}$.
   Beweisen Sie : Das zu $\{\mathcal{R}, \mu\}$ gemäß Satz 1.10 (Vorlesung: Abschnitt 1.4) konstruierte äußere Maß μ^* ist regulär. 2P

2.4 (*Hinreichende Bedingung für μ^*-Meßbarkeit*)
Seien $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring, μ σ-additiver Inhalt auf $\mathcal{R}$ und μ^* das zu $\{\mathcal{R}, \mu\}$ konstruierte Maß (vgl. Vorlesung: Abschn. 1.4, Satz 1.10).
Beweisen Sie: Sei $E \subseteq X$ eine Menge, so daß

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{R} \ \text{ mit: } A_\varepsilon \subseteq E \subseteq B_\varepsilon,\ \mu(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Dann ist E μ^*-meßbar. 3P

$\Rightarrow$ Bitte wenden!

[*Hinweis*: Zeigen: es ex. $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $A \subseteq E$, $\mu^*(E \setminus A) = 0$, dann folgt: E= $A \cup (E \setminus A) \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.]

2.5 Seien $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra und μ Maß auf $\mathcal{A}$.

1. (*Äquivalente Charakterisierung der Vervollständigung einer σ-Algebra*)
   Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für $E \subseteq X$:
   1° $E \in \overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ (:= Vervollständigung von $\mathcal{A}$ bez. μ);
   2° $\exists\, A, B \in \mathcal{A}$ mit: $A \subseteq E \subseteq B$, $\mu(B \setminus A) = 0$;
   3° $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit: $A_\varepsilon \subseteq E \subseteq B_\varepsilon$, $\mu(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$. 3P
2. (*Äquivalente Charakterisierung der Vervollständigung eines Maßes*)
   Sei $E \in \overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ (d.h. $E = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}$, $N \subseteq N_0$, wobei $N_0 \in \mathcal{A}$, $\mu(N_0) = 0$).
   Beweisen Sie

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \in \mathcal{A},\ F \subseteq E\}$$

1P

   ($\overline{\mu}(E) := \mu(A)$ heißt **Vervollständigung von** μ).

Abgabe: 02.05.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis spätestens 11:15 Uhr)