Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

30.05.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 6. Serie –

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maß-Raum.

6.1 Sei $f : X \to [0, +\infty[$ eine einfache Funktion.
Beweisen Sie: Es existiert $C_0 = \text{const} < +\infty$, so daß

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq C_0 \mu(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}. \tag{2 P}$$

6.2 Sei $\mu(X) < +\infty$. Sei $f : X \to [0, M]$ $(M \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}$-meßbar. Beweisen Sie:

$$(*) \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{nM} \frac{k}{n} \mu\left(\left\{ x \,\middle|\, \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\} \right). \tag{4 P}$$

[*Hinweis.* Definiere: $A_n^{(k)} := \left\{ x \,\middle|\, \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}$ $(k = 0, 1, \ldots, nM)$. Betrachte

$$f_n := \sum_{k=0}^{nM} \frac{k}{n} \chi_{A_n^{(k)}}, \quad \tilde{f}_n := \sum_{k=0}^{nM} \frac{k+1}{n} \chi_{A_n^{(k)}} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad]$$

Bemerkung. H. Lebesgue definierte das Integral einer beschränkten meßbaren Funktion einer reellen Veränderlichen durch die Reihe auf der rechten Seite von $(*)$.

6.3 Sei $f : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{A}$-meßbar mit $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$. Beweisen Sie: Es existiert eine Folge (f_n) einfacher Funktionen, so daß

1. $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$,
2. $f_n(x) \to f(x) \quad \forall\, x \in X$
3. (f_n) ist Cauchy-Folge bez. Metrik $d(g, h) := \int_X |g - h| \, \mathrm{d}\mu$ (g, h μ-integrierbar).
4. $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{E}(X), \varphi \leq f \right\}$. (4 P)

Bemerkung. Die Aussage in 6.3 zeigt, daß das Integral einer nichtnegativen $\mathcal{A}$-meßbaren Funktion f als Limes der Integrale einer Folge einfacher Funktionen mit den Eigenschaften 1., 2., 3. und 4. definiert werden kann (vgl. Halmos; Sec. 25) [Konvergenz f.ü. $\Rightarrow$ Konvergenz dem Maß nach].

$\Rightarrow$ Bitte wenden!

6.4 *Erweitertes Lemma von* FATOU. Seien $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}$-meßbar, sei $F : X \to [0, +\infty]$ μ-integrierbar und sei $|f_n(x)| \leq F(x)$ für μ-fast-alle $x \in X$. Beweisen Sie

$$\int_X \liminf f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_X \limsup f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \limsup \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

[vgl. ELSTRODT (1. Aufl.); S. 149, Aufg. 5.4]. (je 2 P)

6.5 Sei $a \in]0, +\infty[$ (fixiert). Für welche $\sigma \in]0, +\infty[$ ist die Funktion $\dfrac{1}{x^\sigma}$ $(x \in]0, +\infty[)$

1. LEBESGUE-integrierbar über $]0, a[$, (2 P)
2. LEBESGUE-integrierbar über $]a, +\infty[$? (2 P)

Bemerkung. Die Funktion $\dfrac{1}{x^\sigma}$ $(x \in]0, +\infty[)$ ist für kein $\sigma \in]0, +\infty[$ LEBESGUE-integrierbar über $]0, +\infty[$,

Abgabe: 06.06.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis 11:15 Uhr)