Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

14.05.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 5. Serie –

Übungen und Ergänzungen zum Integralbegriff

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maß-Raum.

5.1 Sei $f \in \mathcal{M}^+(X)$ fixiert. Definiere:

$$\nu := \int_A f \, \mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Beweisen Sie:

1. ν ist Maß auf $\mathcal{A}$ (1 P)
2. $\displaystyle\int_X g \, \mathrm{d}\nu = \int_X fg \, \mathrm{d}\mu \quad \forall\, g \in \mathcal{M}^+(X).$ (3 P)

5.2 *Approximation von* $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Sei $f : X \to [0, +\infty]$ μ-integrierbar. Beweisen Sie:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, so daß

$$\mu(A_\varepsilon) < +\infty, \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \int_{A_\varepsilon} f \, \mathrm{d}\mu \le \varepsilon. \tag{4 P}$$

Bemerkung. Mit Hilfe dieser Aussage kann das folgende Resultat bewiesen werden: Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ und eine einfache Funktion $g_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$, so daß

$$\mu(A_\varepsilon) < +\infty, \quad g_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall\, x \in X \setminus A_\varepsilon, \quad \int_X |f - g_\varepsilon| \, \mathrm{d}\mu \le \varepsilon.$$

5.3 *Mittelwertsatz.* Sei $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-meßbar mit $\alpha \le f(x) \le \beta$ für μ-fast-alle $x \in X$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Sei $g : X \to [0, +\infty]$ μ-integrierbar. Beweisen Sie: Es existiert ein $\gamma \in [\alpha, \beta]$, so daß

$$\int_X fg \, \mathrm{d}\mu = \gamma \int_X g \, \mathrm{d}\mu. \tag{2 P}$$

5.4 $f : X \to [0, +\infty[$ $\mathcal{A}$-meßbar. Beweisen Sie:

1. Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu\Big(\{x \,|\, n \le f(x) < n+1\}\Big) \le \int_X f \, \mathrm{d}\mu, \tag{1 P}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\Big(\{x \,|\, f(x) \ge n\}\Big) \le \int_X f \, \mathrm{d}\mu. \tag{3 P}$$

$\Rightarrow$ Bitte wenden!

Bemerkung. Aus der zweiten Aussage folgt überdies: *Ist f μ-integrierbar, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\mu\{x \,|\, f(x) \geq n\}\Big) \;=\; 0.$$

2. Wenn $\mu\Big(\{x \,|\, f(x) \,<\, 1\}\Big) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mu\Big(\{x \,|\, n \,\leq\, f(x) \,<\, n+1\}\Big) \,<\, +\infty$, so ist f μ-integrierbar. (2 P)

5.5 Definition. *Eine Folge reellwertiger $\mathcal{A}$-meßbarer Funktionen (f_n) heißt* **konvergent dem Maß** *nach* [convergence in measure] *gegen die reellwertige $\mathcal{A}$-meßbare Funktion f, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\{x \in X \,|\, |f_n(x) - f(x)| \geq t\}\Big) \;=\; 0 \quad \forall\, t > 0.$$

Sei $\mu(X) < +\infty$. Beweisen Sie für $\mathcal{A}$-meßbare Funktionen $f_n, f : X \to \mathbb{R}\,(n \in \mathbb{N})$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

1° $f_n \to f$ dem Maß nach;

2° $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\,\mathrm{d}\mu.$ (4 P)

5.6 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Beweisen Sie:

1. $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} |f|\,\mathrm{d}\lambda_n \;=\; 0.$ (2 P)
2. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer. Sei $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, so daß

$$\int_U f\,\mathrm{d}\lambda_n \;=\; 0 \quad \forall\, U \subseteq E, \quad U \text{ offen.}$$

Beweisen Sie: $f(x) = 0$ für λ_n-fast-alle $x \in E$. (4 P)

Abgabe: 30.05.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis 11:15 Uhr)