Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

18.06.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 9. Serie –

9.1 Sei $f(z) = z^3\,(z \in \mathbb{C})$. Beweisen Sie , daß für alle ξ, die zur Strecke $[1, i]$ gehören gilt

$$\frac{f(i) - f(1)}{i - 1} \neq f'(\xi)$$

$\Big[$d.h. es existiert kein $\theta \in [0, 1]$, so daß

$$\frac{f(i) - f(1)}{i - 1} \neq f'(1 + \theta(i - 1))\Big].$$

3 P

9.2 Bestimmen Sie alle auf $\mathbb{C}$ differenzierbaren Funktionen f der Form
$f(z) = u(x) + iv(y)\,(z = x + iy)$. 1 P

9.3 Sei $\gamma([a, b]) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = \gamma(t),\, t \in [a, b]\}$ eine stetig differenzierbare Kurve in $\mathbb{C}$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Beweisen Sie

$$Re\Big(\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z\Big) \;=\; 0.$$

3 P

8.4 Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Beweisen Sie: Für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Big|\int_a^b Re\Big(e^{t\sigma}\varphi(t)\Big)\,\mathrm{d}t\Big| \;\leq\; \Big|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\Big|,$$

3 P

$$\Big|\int_a^b Im\Big(e^{t\sigma}\varphi(t)\Big)\,\mathrm{d}t\Big| \;\leq\; \Big|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\Big|.$$

1 P

9.5 Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma |z|\bar{z}\,\mathrm{d}z$, wobei γ der geschlossene, in mathematisch positivem Sinne durchlaufene Integrationsweg ist, der sich aus dem Halbkreisbogen $\{z \,|\, |z| = 1, Im\, z \geq 0\}$ und der Strecke $\{z \,|\, -1 \leq Re\, z \leq 1, Im\, z = 0\}$ zusammensetzt. 4 P

$\Rightarrow$ Bitte wenden!

9.6 Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$, wobei:

1) • γ = der geschlossene, in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Halbkreisbogen $\{z \mid |z| = 1, Im\, z \geq 0\}$,

   • $z \mapsto \sqrt{z}$ der Hauptzweig sind; 3 P

2) • γ = der geschlossene, in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Halbkreisbogen $\{z \mid |z| = 1, Im\, z < 0\}$,

   • $z \mapsto \sqrt{z}$ der Nebenweig sind. 3 P

Abgabe: 27.06.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis 11:15 Uhr)