Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

11.06.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 8. Serie –

8.1 Bestimmen Sie die Konvergenzradien von:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{i^n}{n}+n\Big)z^n;$ 3 P

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(i^n+3)z^n.$ 2 P

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten beider Potenzreihen auf dem Rand ihrer Konvergenzkreisscheibe.

8.2 Bestimmen Sie Real- und Imaginärteile folgender komplexer Zahlen:

1) $\sin(2+i)$; 2 P

2) $\mathrm{Log}(1+i\sqrt{3})$. 2 P

8.3 1) Bestimmen Sie $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}$; 3 P

2) Beweisen Sie: Die Funktion $z\mapsto|\sin z|$ ist unbeschränkt in $\mathbb{C}$; 1 P

3) Sei $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ fixiert. Zeigen Sie: Es existiert eine Folge $(z_n)\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} e^{1/z_n} = w.$$ 2 P

8.4 Seien

$$H := \{z\in\mathbb{C}\,|\,Imz>0\}, \quad B_1(0) := \{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}.$$

Definiere

$$f(z) := \frac{z-i}{z+i}, \quad z\in H \quad (\text{Cayley-Abbildung}).$$

Beweisen Sie:

1) $f(z)\in B_1(0) \quad \forall\, z\in H$; 1 P

2) f ist bijektiv; 2 P

3) $f'(z)\neq 0 \quad \forall\, z\in H$. 1 P

8.5 Beweisen Sie: Die Funktion $f(z) := z\bar{z}\,(z\in\mathbb{C})$ ist nur in $z=0$ differenzierbar.

$\Rightarrow$ Bitte wenden!

8.6 Sei

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & \text{für} \quad z \neq 0 \quad (z = x+iy) \\ 0 & \text{für} \quad z = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie:

1) In $z = 0$ sind die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erfüllt; 1 P
2) f ist nicht differnzierbar in $z = 0$. 1 P

8.7 Beweisen Sie, daß es keine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f mit $Re(f(z)) = x^2 + y^2$ gibt $(z = x + iy)$. 2 P

Abgabe: 20.06.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis 11:15 Uhr)