Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik 04.06.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 7. Serie –

7.1 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maß-Raum. Sei $f : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{A}$-meßbar. Beweisen Sie

1) $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,|\, 0 \le t \le f(x)\}$ ist $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-meßbar (3 P)
[Hinweis. Approximation durch einfache Funktionen].
Sei außerdem $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlich. Dann gilt

2) für $A \in \mathcal{A}$ gilt
$$(\mu \times \lambda_1)\Big(\{(x,t) \in A \times \mathbb{R} \,|\, 0 \le t \le f(x)\}\Big) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu; \qquad (2\,\mathrm{P})$$

3) wenn $f(x) < +\infty$ für alle $x \in X$, so gilt:
$$(\mu \times \lambda_1)\Big(\{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}\Big) = 0. \qquad (3\,\mathrm{P})$$

7.2 Sei $f : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ LEBESGUE-integrierbar. Beweisen Sie:

$$\int_a^b \left(\int_a^y f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \right) \mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_a^b \left(\int_x^b f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda_1(y) \right) \mathrm{d}\lambda_1(x)$$

(Formel von DIRICHLET). (3 P)

[Hinweis. Integration mit $f\chi_E (E \subset [a,b] \times [a,b]$ geeignet gewählt) über $[a,b] \times [a,b]$ integrrieren; FUBINI.]

Übungen zur Berechnung von Integralen über Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

7.3/1) Sei $\mathcal{R} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3 \le x_1 \le 4, 1 \le x_2 \le 2\}$. Berechnen Sie
$$\int_{\mathcal{R}} \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} \,\mathrm{d}\lambda_2. \qquad (1\,\mathrm{P})$$

2) Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeters
$$T_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le 1\}. \qquad (4\,\mathrm{P})$$

3) Sei $B_r(0) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$. Berechnen Sie
$$\int_{B_r(0)} x_2^2 \sqrt{r^2 - x_1^2} \,\mathrm{d}\lambda_2. \qquad (3\,\mathrm{P})$$

4) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge, die von den beiden Parabeln $y = x^2$ und $y^2 = x$ begrenzt wird. Berechnen Sie
$$\int_A (x^2 + y) \,\mathrm{d}\lambda_2. \qquad (2\,\mathrm{P})$$

Abgabe: 13.06.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis 11:15 Uhr)