Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik 07.05.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 4. Serie –

4.1 Beweisen Sie: Das äußere LEBESGUE-Maß λ_n^* ist *translationsinvariant*: für $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ sei

$$A + \{\xi\} := \{y \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, y = x + \xi,\, x \in A\};$$

dann gilt: $\lambda_n^*(A + \{\xi\}) = \lambda_n^*(A)$. (4 P)

[*Bemerkung*: Für Parallelepipede $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist bekannt: $v_n(Q + \{\xi\}) = v_n(Q)\,\forall\,\xi \in \mathbb{R}^n$.]

4.2 Beweisen Sie:

1) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda_n(A) < +\infty$. Dann gilt:

$$\sup\left\{\lambda_n(F) \,\Big|\, F \text{ abgeschlossen, } F \subseteq A\right\} = \lambda_n(A) = \inf\left\{\lambda_n(G) \,\Big|\, G \text{ offen, } G \supseteq A\right\};$$

(2 P)

2) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, so daß

$$\sup\left\{\lambda_n(F) \,\Big|\, F \text{ abgeschlossen, } F \subseteq A\right\} = \inf\left\{\lambda_n(G) \,\Big|\, G \text{ offen, } G \supseteq A\right\} < +\infty.$$

Dann ist $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. (2 P)

4.3 Sei $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ RIEMANN-integrierbar. Sei

$$\begin{aligned} G_f : &= \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x_1 \in [a, b],\, x_2 = f(x_1)\right\} \\ &= \text{Graph von } f. \end{aligned}$$

Beweisen Sie: $\lambda_2(G_f) = 0$. (3 P)

4.4 Seien $a, b \in \mathbb{R} (a < b)$. Beweisen Sie:

1. Jede monotone Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ ist BOREL-meßbar. (2 P)
2. Seien $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ monoton und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LEBESUE-meßbar. Dann ist $f \circ g$ LEBESUE-meßbar. (1 P)
3. Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $]a, b[$. Dann ist f' BOREL-meßbar. (2 P)

4.5 Sei $(X, \mathcal{A})$ meßbarer Raum, sei $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-meßbar.
Beweisen Sie: Für jede stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\varphi \circ f$ $\mathcal{A}$-meßbar. (3 P)

Abgabe: 16.05.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis 11:15 Uhr)