Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

30.04.2007

Übungsaufgaben Analysis IIIB

Vorlesung von Prof. J. Naumann, Sommersemester 2007

– 3. Serie –

3.1 Für die Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gelte:

$$\exists \alpha \in]0,1[, \text{ so daß: } \lambda_n^*(A \cap Q) \leq \alpha v_n(Q) \quad \forall\, Q \in \mathcal{H}_n.$$

Beweisen Sie: $\lambda_n^*(A) = 0$. (2 P)

3.2 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1^0 $\lambda_n^*(K) = 0$;

2^0 $\forall \varepsilon \geq 0$ $\exists Q_k \in \mathcal{H}_n$ $(k = 1, \ldots, m)$, so daß

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} Q_k, \quad \sum_{k=1}^{m} v_n(Q_k) \leq \varepsilon. \qquad (3\,\text{P})$$

[d.h. K ist genau dann LEBESGUEsche Nullmenge, wenn K JORDANsche Nullmenge ist].
Hinweis. $2^0 \Rightarrow 1^0$ ist trivial.
(Weitere ÜAufgaben zur JORDAN-Meßbarkeit: ELSTRODT: *Maß- und Integrationstheorie*; Kap. II, Aufg. 7.6).

3.3 Sei $A \subset \mathbb{R}^n (A \neq \emptyset)$ offen, $\lambda_n(A) < +\infty$. Sei $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $B \subset A$ und $\lambda_n(A) = \lambda_n(B)$. Beweisen Sie: $\overline{A} = \overline{B}$. (3 P)

3.4 Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\,(A \neq \emptyset)$. Beweisen Sie:

1. Wenn $\lambda_n(A) < +\infty$, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subset A$, so daß $\lambda_n(K_\varepsilon) \geq \lambda_n(A) - \varepsilon$.
   [Insbesondere gilt also: Jede LEBESGUE-meßbare Menge positiven Maßes enthält eine kompakte Teilmenge positiven Maßes.] (2 P)
2. Wenn $\lambda_n(A) = +\infty$, so existiert für jedes $t \in]0, +\infty[$ eine kompakte Menge $K_t \subset A$, so daß $\lambda_n(K_t) \geq t$. (2 P)

3.5 Seien $A, B \subset [0,1]$ LEBESGUE-meßbare Mengen mit $\lambda_1(A) + \lambda_1(B) > 1$. Beweisen Sie: $\lambda_1(A \cap B) > 0$. (1 P)

3.6 (*Ein Erzeugersystem für die σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ der* BOREL-*Mengen des* $\mathbb{R}^1$) Sei

$$\mathcal{E} := \Big\{ [a, +\infty[\;\Big|\; a \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Beweisen Sie: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$. (2 P)

Abgabe: 09.05.2007 (Briefkasten neben dem Fachschaftsbüro bis spätestens 11:15 Uhr)