Prof. A. Baudisch
Institut für Mathematik 3. Dezember 2007

7. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

(Abgabe: 10. Dezember 2007)

7.1 Zeigen Sie, daß

$$\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \exists x \exists y\, \psi(x,a) \quad \text{und} \quad \exists x \exists y(\varphi(x,y) \rightarrow \psi(x,y))$$

logisch äquivalent sind.

7.2 M und N seien Strukturen einer Sprache mit einem zweistelligen Funktionssymbol f.
Sei $\mathrm{dom}(M)$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle auf den ganzen Zahlen vereinigt mit der leeren Menge. $f^M(x,y)$ sei der Durchschnitt von x und y.
N sei über $\mathbb{Q}$ ähnlich definiert, nur daß $\mathrm{dom}(N)$ die Menge aller offenen Intervalle auf $\mathbb{Q}$ vereinigt mit der leeren Menge ist. f^N sei auch der Durchschnitt.

Geben Sie eine Aussage φ an, so daß $M \models \varphi$ und $N \models \neg\varphi$.

7.3 Geben sie die Negation der folgenden Aussage in prenexer disjunktiver oder konjunktiver Normalform an:

$$\forall x([\exists yz[R(y,x) \wedge R(x,z) \wedge \forall w(w \neq x \wedge w \neq y \wedge w \neq z \rightarrow R(w,y) \vee R(z,w))]]$$
$$\vee[\forall y[(R(y,x) \rightarrow \exists z(R(y,z) \wedge R(z,x))) \wedge (R(x,y) \rightarrow \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)))]]]).$$

7.4 M sei eine Struktur in der Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol $R(x,y)$. $\mathrm{dom}(M) = \{(a,b) : a, b \text{ natürliche Zahlen}\}$, $R^M((a,b),(c,d))$ genau dann, wenn $a = c$.

i) Zeigen Sie, daß R^M eine Äquialenzrelation mit unendlich vielen Klassen ist, wobei jede Klasse unendlich viele Elemente enthält.

ii) Zeigen Sie, daß in M die einzigen $\emptyset$-definierbaren Mengen die leere Menge und $\mathrm{dom}(M)$ sind.