Prof. A. Baudisch
Institut für Mathematik 23. Januar 2008

13. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

(Abgabe: 4. Februar 2008)

13.1 a) Einelementige Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind rekursiv.

b) Endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind rekursiv.

13.2 Sei L die elementare Sprache einer zweistelligen Relation $R(x,y)$. Für $n \le m$ ($m \neq 0$) seien $\theta_{n,m}(v_0)$ die folgenden Formeln (induktive Definitionen):

$$\theta_{0,1}(v_0, v_1) \equiv R(v_0, v_1) \wedge v_0 \neq v_1$$
$$\theta_{0,m+1}(v_0) \equiv \theta_{0,m}(v_0, \dots, v_m) \wedge R(v_0, v_{m+1}) \wedge \bigwedge_{0 \le i \le m} v_i \neq v_{m+1}$$
$$\theta_{n+1,m}(v_0, v_{n+2}, \dots, v_m) \equiv \exists v_{n+1} \theta_{n,m}(v_0, v_{n+1}, \dots, v_m)$$

oder kurz

$$\theta_{n,m}(v_0, v_{n+1}, \dots, v_m)) \equiv \exists v_n \dots \exists v_1 \Big(\bigwedge_{0<i\le m} R(v_0, v_i) \wedge \bigwedge_{i<j\le m} v_i \neq v_j \Big).$$

Wir nehmen an, daß $\wedge$, $\vee$ und $\exists$ auch zu L gehören und Symbolnummern besitzen.

a) Zeigen Sie, daß die Funktionen $f(n,m) = \ulcorner \theta_{n,m}(v_0, v_{n+1}, \dots, v_m) \urcorner$ und $g(n) = \ulcorner \forall v_0\, \theta_{n,n}(v_0) \urcorner$ rekursiv sind.
(Hinweis: Definieren Sie zuerst $f(0,m)$ induktiv über m und dann $f(n,m)$ für festes m induktiv über $n \le m$.)

b) Zeigen Sie, daß die Menge $\{\ulcorner \forall v_0\, \theta_{n,n}(v_0) \urcorner : n \in \mathbb{N}\}$ rekursiv ist.

13.3 Sei L wieder die elementare Sprache einer zweistelligen Relation $R(x,y)$.

a) Geben Sie eine endliche Menge Σ_0 von Aussagen an, so daß $M \models \Sigma_0$ genau dann, wenn R^M eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Klassen ist.

b) Geben Sie eine rekursive Axiomatisierung $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ an, so daß $M \models \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ genau dann, wenn R^M eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Klassen ist, die beide unendlich sind.
(Hinweis: Nutzen Sie 13.1 und 13.2.)

13.4 L, Σ_0, Σ_1 seien wie in 13.3 gegeben. Zeigen Sie:

a) Alle abzählbaren Modelle von $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ sind isomorph.

b) $(\Sigma_0 \cup \Sigma_1)^{\models}$ ist eine vollständige Theorie.

c) $(\Sigma_0 \cup \Sigma_1)^{\models}$ ist entscheidbar.