

2. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

(Abgabe: 5. November 2007)

2.1 Für eine Formel φ sei

$\ell(\varphi)$ die Länge von φ ,

$n(\varphi)$ die Anzahl des Vorkommens von „ \neg “ in φ und

$b(\varphi)$ die Anzahl des Vorkommens binärer Konnektoren in φ .

Zeigen Sie: $\ell(\varphi) = 4b(\varphi) + n(\varphi) + 1$.

2.2 Geben Sie eine Formel φ in den Aussagenvariablen p_0 und p_1 sowie Formeln ψ_0 und ψ_1 auch über p_0 und p_1 an, so daß folgende Formeln paarweise verschieden sind:

$$\begin{aligned} &\varphi_{\psi_0/p_0, \psi_1/p_1} \\ &(\varphi_{\psi_0/p_0})_{\psi_1/p_1} \\ &(\varphi_{\psi_1/p_1})_{\psi_0/p_0}. \end{aligned}$$

(Hinweis: Die erste Formel entsteht durch eine Substitution. Die anderen beiden Formeln durch Hintereinanderausführung von zwei Substitutionen.)

2.3 Stellen Sie die Wahrheitwerttafeln für die folgenden Formeln auf. Sind sie Tautologien?

i) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$

ii) $p \vee q \rightarrow p$

2.4 Seien φ, ψ, θ beliebige Formeln. Stellen Sie fest, ob folgende Formeln Tautologien sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

i) $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$

ii) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$