

9. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

(Abgabe: 7. Januar 2008)

9.1 Leiten Sie $\forall x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \forall x \varphi$ ab.

9.2 Sei L eine elementare Sprache, die für jede rationale Zahl q ein Konstantensymbol c_q enthält sowie eine zweistellige Relation $x < y$. Sei T die Theorie der Ordnung Q der rationalen Zahlen in dieser Sprache. Zeigen Sie die Existenz eines T -Modells M mit einem Element a , das zwischen 0 und jeder rationalen Zahl $q > 0$ liegt. D.h. $M \models 0 < a < c_q^M$.

(*Hinweis*: Endlichkeitssatz)

9.3 Wir definieren: $\Sigma \models \forall \bar{x} \bigvee_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(\bar{x})$ trifft genau dann zu, wenn für jedes $M \models \Sigma$ und jedes \bar{a} aus M ein $i \in \mathbb{N}$ mit $M \models \varphi_i(\bar{a})$ existiert. Zeigen Sie: Wenn $\Sigma \models \forall \bar{x} \bigvee_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(\bar{x})$, so existieren endliche Teilmengen $I_0 \subseteq \mathbb{N}$ und $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ mit

$$\Sigma_0 \models \forall \bar{x} \bigvee_{i \in I_0} \varphi_i(\bar{x}).$$

(*Hinweis*: Endlichkeitssatz. Betrachten Sie $\Sigma \cup \{\neg \varphi_i(c) : i \in \mathbb{N}\}$. c neues Konstantensymbol.)