

5. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

(Abgabe: 26. November 2007)

- 5.1 Gesucht sind Formeln φ in konjunktiver und ψ in disjunktiver Normalform über den Aussagenvariablen p_0, p_1, p_2 , so daß $B^*(\varphi) = B^*(\psi) = 1$ genau dann, wenn ein i existiert mit $B(p_i) = B(p_{i+1}) = 1$ und $B(p_{i+2}) = 0$. Dabei werden die Indizes modulo 3 berechnet.
- 5.2 Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ eine nicht erfüllbare Menge Σ_n von n Formeln an, für die aber jede echte Teilmenge erfüllbar ist.
- 5.3 Geben Sie die maximale Anzahl von logisch nicht äquivalenten Formeln über den Aussagenvariablen p_0, \dots, p_{n-1} an. Beweisen Sie Ihre Antwort.
Die Ergebnisse der Vorlesung können benutzt werden, auch wenn sie nicht bewiesen wurden.
- 5.4 Beweisen Sie folgenden Satz:
Sei $\varphi \rightarrow \psi$ eine Tautologie und φ und ψ besitzen mindestens eine gemeinsame Aussagenvariable. Dann existiert eine Formel θ mit folgenden Eigenschaften:
- i) die Aussagenvariablen, die in θ vorkommen, kommen sowohl in φ als auch in ψ vor.
 - ii) $\varphi \rightarrow \theta$ und $\theta \rightarrow \psi$ sind Tautologien.