Prof. A. Baudisch
Institut für Mathematik

5. Dezember 2007

8. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

(Abgabe: 17. Dezember 2007)

8.1 Sei x nicht frei in ψ. Dann $\vdash \exists x\, \psi \to \psi$.
(möglicher Start: $\vdash \forall x(\neg\psi \to \neg\psi) \to (\neg\psi \to \forall x \neg\psi)$ Quantorenaxiom)

8.2 a) φ' sei eine Aussage und in ψ' komme höchstens die Variable x frei vor. Zeigen Sie durch Ableiten

$$\vdash (\varphi' \longrightarrow \exists\, x\, \psi') \longrightarrow \exists\, x(\varphi' \longrightarrow \psi').$$

(Eine Möglichkeit ist es

$$\{\forall\, x \neg(\varphi' \longrightarrow \psi')\} \vdash \neg(\varphi' \longrightarrow \exists\, x\, \psi')$$

zu zeigen und dann das Deduktionstheorem anzuwenden. Man beachte $\neg(\varphi' \to \psi')$ können wir auch als $\varphi' \wedge \neg\psi'$ schreiben. Nutzen Sie Lemma 7.4 und 7.5.)

b) Wie erhält man aus a)

$$\vdash (\varphi \longrightarrow \exists\, x\, \psi) \longrightarrow \exists\, x(\varphi \longrightarrow \psi)$$

für beliebige Formeln φ, in denen x nicht frei vorkommt und beliebige Formeln ψ.

8.3 Sei Σ maximal konsistent. ψ und θ seien beliebige Aussagen. Dann gilt $\theta \wedge \psi \in \Sigma$ genau dann, wenn $\theta \in \Sigma$ und $\psi \in \Sigma$.

8.4 Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse bis einschließlich Kapitel 7 der Vorlesung, daß die Aussage $\forall x \exists y\, \varphi(x,y) \to \exists y \forall x\, \varphi(x,y)$ nicht ableitbar ist.