Prof. A. Baudisch
Institut für Mathematik 21. November 2007

6. Übungen

zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“

(Abgabe: 3. Dezember 2007)

6.1 Wir betrachten die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in der Signatur $\langle 0, 1, +, -, \cdot, < \rangle$.

a) Zeigen Sie, daß die Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}$ nur die identische Abbildung enthält.

b) Sei $\mathbb{Z} \upharpoonright <$ das Redukt von $\mathbb{Z}$ auf die Sprache der Signatur $<$, d.h. $\mathbb{Z} \upharpoonright <$ ist die Ordnung der ganzen Zahlen.
Zeigen Sie, daß die Automorphismengruppe von $\mathbb{Z} \upharpoonright <$ unendlich ist.

6.2 Eine Struktur M der Signatur $\langle < \rangle$, wobei $<$ eine zweistellige Relation ist, heißt Halbordnung, wenn in M gilt:

i) Für alle a gilt <u>nicht</u> $a < a$.

ii) Für alle a, b, c folgt aus $a < b$ und $b < c$ auch $a < c$.

M heißt Ordnung, wenn weiterhin gilt:

iii) Für alle a, b gilt $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.

Zeigen Sie für "$<$Strukturen M und N:

Wenn M und N Ordnungen sind, so ist jeder Homomorphismus von M in N ein Monomorphismus.

6.3 L sei durch ein zweistelliges Relationssymbol R gegeben. M sei eine endliche L-Struktur auf der R^M eine Äquivalenzrelation ist. R^M besitzt drei Äquivalenzklassen. Zwei enthalten 4 Elemente und die dritte nur 3 Elemente.

a) Geben Sie eine L-Formel an, die M bis auf Isomorphie beschreibt.

b) Beschreiben Sie die Automorphismen von L, indem Sie die möglichen Typen von Automorphismen beschreiben.

6.4 Wieder sei L eine Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol $R(x, y)$. Geben Sie eine L-Formel $\varphi(x, y)$ und L-Strukturen M und N an, so daß

$$M \vDash \exists x \forall y\, \varphi(x, y) \quad \text{und} \quad N \vDash \forall y \exists x\, \varphi(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y\, \varphi(x, y).$$