Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2009

Persönliche Mitschrift von
Yves Radunz

Inhaltsverzeichnis

Vorlesung am

Vorlesung am 20.04.2009

Kapitel 0

Einführung

0.1 Beispiele

1. Ein Räuber-Beute-Modell

   $x \geq 0$ Anzahl (Dichte) der Beute-Population
   $y \geq 0$ Anzahl (Dichte) der Räuber-Population
   $0 < a$ Vermehrungsrate-Sterberate
   $0 < d$ Sterberate-Vermehrungsrate

   $b, c > 0$

   $x' = ax - bxy$

   $y' = cxy - dy$

2. Elektrischer Schwingkreis

   1. Kirchh. Gesetz $I_R = I_L = I_C = I$

   2. Kirchh. Gesetz $U(t) = U_R + U_L + U_C$

   $U'(t) = RI' + LI'' + \frac{I}{C}$

   $\Rightarrow I'' = \frac{1}{L}(U'(t) - \frac{I}{C} - RI')$ (lineare Gleichung 2. Ordnung)

3. m-Körper-Problem

$$m_j x_j'' = -\kappa \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \frac{x_0 - x_k}{\|x_0 - x_k\|^3}, j = 1, ..., m, x_j \in \mathbb{R}^3$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_{1,1}\\
y_2 &= x_{1,2}\\
y_3 &= x_{1,3}\\
y_4 &= x'_{1,1}\\
y_5 &= x'_{1,2}\\
y_6 &= x'_{1,3}\\
y_7 &= x_{2,1}\\
y_8 &= x_{2,2}\\
&\vdots\\
y_{6m} &= x'_{m,3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_4\\
y_2' &= y_5\\
y_3' &= y_6\\
y_4' &= -\frac{\kappa}{m_1}\sum_{k=2}^{m}\frac{y_1 - y_{6(k-1)+1}}{\left(\sum_{l=1}^{3}(y_l - y_{6(k-1))+l})^2\right)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{R}^{6m+1} \supseteq U\{(t, \underbrace{x_1, ..., x_m}_{\in\mathbb{R}^{3m}}, \underbrace{x_1', ..., x_m'}_{\in\mathbb{R}^{3m}})|x_j \neq x_k, \forall j \neq k\}
$$

“Gute Lösung”:

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{\|x_j(t) - x_k(t)\|, \frac{1}{\|x_j(t) - x_k(t)\|}\right\} < \infty
$$

Frage: Ist die Vereinigung aller Orbits $\{(t, x_1(t), ..., x_m(t), x_1'(t), ..., x_m'(t))|t \in \mathbb{R}\}$ von Lösungen offen und dicht in U?

0.2 Die Anfangswertaufgabe

Definition (Anfangswertaufgabe)
Die Aufgabe
geg.: $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(\tau, \xi) \in U$
ges.: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $x : I \to \mathbb{R}^n$ stetig diff’bar mit $\forall t, \tau \in I : (t, x(t)) \in U$,

$$
\forall t \in I : x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1}
$$

$$
x(\tau) = \xi \tag{2}
$$

heißt *Anfangswertaufgabe* zu dem System (1).

Definition
Die Aufgabe
geg.: $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(\tau, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ in U
ges.: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $x : I \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar mit $\forall t, \tau \in I : (t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \in U$,

$$\forall t \in I : x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \tag{3}$$

$$x(\tau) = \xi_0, x'(\tau) = \xi_1, ..., x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \tag{4}$$

heißt *Anfangswertaufgabe* zur Gleichung (3).

Bemerkung
Die Transformation von (3), (4) in (1), (2) ist wie bei den bereits betrachteten Differentialgleichungen möglich.

Beispiel

1. $x'' = -\frac{g}{l} \sin x$
   $x(\tau) = \xi_0, x'(\tau) = \xi_1$
2. $x'' = -\frac{P}{c} \sin x$
3. $x(\tau) = \xi, y(\tau) = \mu$
4. $I(\tau) = \xi_0, I'(\tau) = \xi_1$
5. $x_j(\tau) = \xi_{0,j}, x'_j(\tau) = \xi_{1,j}, j = 1, ..., m$

0.2.1 Existenz und Eindeutigkeit

Definition
Ein Problem heißt *korrekt gestellt*, wenn für gegebene Daten genau eine Lösung existiert und diese Lösung stetig von den Daten abhängt.

Satz 0.1. (Existenzsatz von Peano) *Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $x : [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ von (1), (2).*

Beispiel
Fehlende Eindeutigkeit: $n = 1, U = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = \sqrt{|x|}$, $\tau = \xi = 0$, $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$
erste Lösung: $I = \mathbb{R}$, $x(t) = 0$
zweite Lösung: $I = \mathbb{R}$, $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & , t \geq 0 \\ -\frac{t^2}{4} & , t < 0 \end{cases}$

Vorlesung am 22.04.2009

Definition (Lipschitz-Stetigkeit)

1. f heißt *lokal Lipschitz-stetig* bzgl. x, wenn gilt:

$$\begin{aligned} &\forall (t_0, x_0) \in U : \exists \delta > 0, L > 0 : \\ &\quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in U, |t - t_0| < \delta, \|x_1 - x_0\| < \delta, \|x_2 - x_0\| < \delta : \\ &\quad\quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$, dann heißt f lokal Lipschitz-stetig, wenn gilt:

$$\begin{aligned}&\forall x_0 \in U : \exists \delta > 0, L > 0 : \\ &\qquad \forall x_1, x_2 \in U, \|x_1 - x_0\| < \delta, \|x_2 - x_0\| < \delta : \\ &\qquad\qquad \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

Satz 0.2. (Eindeutigkeitssatz) *Sei f lokal Lipschitz-stetig bzgl. x, $x_j : I_j \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ zwei Lösungen von (1), (2).*
Dann gilt $x_1 = x_2$ auf $I_1 \cap I_2$.

Beweis:

1. $\forall t \approx \tau : x_1(t) = x_2(t)$:

$$\begin{aligned}x_1(t) - \xi &= \int_\tau^t f(s, x_1(s))ds, \\ x_2(t) - \xi &= \int_\tau^t f(s, x_2(s))ds \\ \|x_1(t) - x_2(t)\| &= \left\| \int_\tau^t \left(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right) ds \right\| \\ &\leq \int_\tau^t \underbrace{\|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|}_{\leq L\|x_1(s) - x_2(s)\|} ds \\ &\leq \underbrace{L \int_\tau^t \|x_1(s) - x_2(s)\| ds}_{=: Y(t)} \\ \frac{d}{dt} \ln(Y(t) + \varepsilon) &= \frac{Y'(t)}{Y(t) + \varepsilon} \\ &\leq \frac{LY(t)}{Y(t) + \varepsilon} \\ &\leq L \quad (\forall t \approx \tau, \varepsilon > 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\forall T \approx \tau, T > \tau, \varepsilon > 0 : \\ &\underbrace{\ln(Y(T) + \varepsilon) - \ln(\underbrace{Y(\tau)}_{=0} + \varepsilon)}_{\ln \frac{Y(T)+\varepsilon}{\varepsilon}} = \int_\tau^T \frac{d}{dt} \ln(Y(t) + \varepsilon) dt \\ &\qquad\qquad \leq L(T - \tau)\end{aligned}$$

$$Y(T) \leq Y(t) + \varepsilon \leq \varepsilon e^{L(T-\tau)}$$

$\varepsilon \searrow 0 : Y(t) \leq 0 \Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$

2. $x_1(t) = x_2(t) \forall t \in I_1 \cap I_2$

   Sei im Gegenteil $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$, z.B. $t_0 > \tau, t_0 \in T_1 \cap T_2$.

   $t_* = \inf\{t \in I_1 \cap I_2 : x_1(t) \neq x_2(t), t \geq \tau\}$

   $\Rightarrow t_* \geq \tau + \varepsilon$

   $x_1(t) = x_2(t)$ für alle $t \in [\tau, t_*[$ nach Definition von t_*

   $\Rightarrow x_1(t_*) = x_2(t_*)$ nach Stetigkeit von x_1, x_2

   Nach Schritt 1. mit t_* statt τ und $x_1(t_*) = x_2(t_*)$ anstelle von ξ.

   $\Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$ für $t \approx t_*$.

   $\Rightarrow$ Widerspruch zur Definition von t_*.

$\square$

Lemma 0.1. (Gronwall)
Sei $y : [\tau, T] \to [0, \infty[$ stetig, $L \geq 0$ und es gelte $\forall t \in [\tau, T] : y(t) \leq y(\tau) + L \int_\tau^t y(s)ds$.
Dann gilt $\forall t \in [\tau, T] : y(t) \leq y(\tau)e^{L(t-\tau)}$.

Beweis:
Siehe vorherigen Satz, Schritt 1. $\square$

Lemma 0.2. *Wenn f stetig diff'bar ist, so ist f lokal Lipschitz-stetig bzgl. x.*

Beweis:

$$
\begin{aligned}
f(t, x_1) - f(t, x_2) &= \int_0^1 \underbrace{\frac{d}{ds} f(t, sx_1 + (1-s)x_2)}_{\underbrace{\partial_x f(t, sx_1 + (1-s)x_2)}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\in \mathbb{R}^n}} ds \\
&= \int_0^1 \partial_x f(t, sx_1 + (1-s)x_2) ds (x_1 - x_2) \\
\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| &= \left\| \int_0^1 \partial_x f(t, sx_1 + (1-s)x_2) ds (x_1 - x_2) \right\| \\
&\leq \underbrace{\left\| \int_0^1 \partial_x f(t, sx_1 + (1-s)x_2) ds \right\|_{\text{Operatornorm}}}_{\leq const, \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \cdot \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}
$$

$\square$

Lemma 0.3. (Kriterium für stetige Diff'barkeit) *f ist genau dann stetig diff'bar, wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_t f, \partial_{x_1} f, ..., \partial_{x_n} f$ existieren und stetig sind.*

(ohne Beweis)

Beispiel
$f(x, y) = (ax - bxy, cxy - dy)$
$\partial_x(bxy) = by$ stetig bzgl. (x, y)

Satz 0.3. **(Picard-Lindelöf)** *Sei f stetig und lokal Lipschitz bzgl. x. Weiterhin seien $a > 0$, $b > 0$ mit $\{(t,x) : |t-\tau| \leq a, \|x-\xi\| \leq b\} \subseteq U$ und*

$$\varepsilon = \min \left\{ a, \frac{b}{\max_{\substack{|t-\tau|\leq a \\ \|x-\xi\|\leq b}} \|f(t,x)\|} \right\}.$$

Dann existiert eine Lösung $x : [\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon]$ von (1), (2).

Beispiel
$n = 1$, $U = \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = x^2$, $\tau = 0$, $\xi = 1$
$x' = x^2$, $x(0) = 1$
$x(t) = \frac{1}{1-t}$, $t \in]-\infty, 1[$
$x'(t) = -\frac{1}{(1-t)^2} \cdot (-1) = (\frac{1}{1-t})^2 = x(t)^2$
$\varepsilon = \min \left\{ a, \frac{b}{\max_{|x-1|\leq b} \|x^2\|} \right\} = \min \left\{ a, \frac{b}{(1+b)^2} \right\}$

Vorlesung am 27.04.2009

0.3 Maximale Lösungen

Definition

1. Seien $x_j : I_j \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ zwei Lösungen von (1)(2) mit $I_1 \supset I_2$, dann heißt x_1 (*echte*) *Fortsetzung* von x_2.
2. Eine Lösung von (1)(2), die keine Fortsetzung besitzt, heißt *maximal*.

Beispiel
$n = 1$, $U = \mathbb{R}^2$, $\tau = 0$, $\xi = 1$

- $f(t,x) = x^2$:
  $x' = x^2$, $x(0) = 1$, $x(t) = \frac{1}{1-t}$ für $-\infty < t < 1$
- $f(t,x) = x$:
  $x' = x$, $x(0) = 1$, $x(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$

Lemma 0.4. *Der Definitionsbereich einer maximalen Lösung ist offen.*

Beweis:
Sei, im Gegenteil, $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ maximale Lösung von (1)(2), mit $\max \tilde{I} = T \in \tilde{I}$.
$(T, \hat{x}(T)) \in U$
betrachte das AWP

$$x' = f(t,x), x(T) = \tilde{x}(T) \tag{3}$$

Nach Picard-Lindelöf existiert eine eindeutige Lösung $x_1 : [T-\varepsilon, T+\varepsilon]$ von (3).

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & , t \in \tilde{I} \\ x_1(t) & , T-\varepsilon \leq t \leq T+\varepsilon \end{cases}$$

$\Rightarrow x_2$ ist Lösung von (1)(2), also Fortsetzung von $\tilde{x}$.
$\Rightarrow$ Widerspruch $\square$

Satz 0.4. *Es existiert genau eine maximale Lösung von (1)(2).*

Beweis:

1. Eindeutigkeit

   Seien $x_j : I_j \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ maximale Lösungen.

   $x_3(t) = \begin{cases} x_1(t) & , t \in I_1 \\ x_2(t) & , t \in I_2 \end{cases}$ ist Lösung von (1)(2) und Fortsetzung, falls $I_1 \neq I_2$.

   $\Rightarrow I_1 = I_2$

2. Existenz Sei M die Menge aller Lösgungen von (1)(2). Für $x \in M$ sei $t_-(x)$ bzw. $t_+(x)$ das linke bzw. rechte Intervallsende des Definitionsbereichs von x. Seien $t_- = \inf_{x\in M} t_-(x)$ und $t_+ = \sup_{x\in M} t_+(x)$.

   Konstruiere Lösung $\tilde{x} :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$, die maximal ist:

   $\tau < t_0 < t_+$: $\exists$ Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ von (1)(2) mit $[\tau, \frac{t_+ + t_0}{2}] \subseteq I$

   $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$

   Die Definition ist korrekt nach dem Eindeutigkeitssatz.

   $\tilde{x}(t) = x(t)$ für $t \approx t_0 \Rightarrow \tilde{x}$ ist stetig diff'bar für $t \approx t_0$ und erfüllt (1) für $t \approx t_0$.

   $\Rightarrow \tilde{x}$ erfüllt (1) auf $]t_-, t_+[$

   $\tilde{x}$ erfüllt (2) nach Definition. $\square$

Satz 0.5. *Sei $U = \mathbb{R}^{n+1}$, $x :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung von (1)(2), $t_+ < \infty$.*
$\Rightarrow \lim_{t\nearrow t_+} \|x(t)\| = \infty$ *(blow up)*
Analog: $t_- > -\infty \Rightarrow \lim_{t\searrow t_-} \|x(t)\| = \infty$ (Urknall)

Beweis:
Sei, im Gegenteil, $\tilde{x} :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ maximale Lösung von (1)(2) mit $U = \mathbb{R}^2$, $t_+ < \infty$ mit $\|x(t_j)\| \leq$ *const*, $t_j \nearrow t_+$.
Bolzano-Weierstraß: O.B.d.A. $x(t_j) \to x_t \in \mathbb{R}^n$
Beachte AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_j) = \tilde{x}(t_j)$.

$$\min\left\{\frac{a}{2}, \frac{\frac{b}{2}}{\max\limits_{\substack{|t-t_j|\leq\frac{a}{2} \\ \|x-\tilde{x}(t_j)\|\leq\frac{b}{2}}} \|f(t,x)\|}\right\} \geq \underbrace{\frac{1}{2}\min\left\{a, \frac{b}{\max\limits_{\substack{|t-t_+|\leq a \\ \|x-x_+\|\leq\frac{b}{2}}} \|f(t,x)\|}\right\}}_{=\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$ Es existiert eine Lösung auf $[t_j - \varepsilon_0, t_j + \varepsilon_0]$.

Bemerkung
$x'' = f(t, x, x')$, $x(t\tau) = \xi_0$, $x'(\tau) = \xi_1$
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig, lokal Lipschitz bzgl. x, x', $x :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}$ max. Lösungen, $t_+ < \infty$
$\Rightarrow \lim_{t\nearrow t_+} \sqrt{|x(t)|^2 + |x'(t)|^2} = \infty$
$x_1' = x_2$, $x_2' = f(t, x_1, x_2)$

Vorlesung am 29.04.2009

Kapitel 1

Einige analytische Lösungsmethoden

1.1 Gleichungen mit getrennten Variablen

$$x' = f(x)g(t) \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi \tag{2}$$

$f : X \to \mathbb{R}$ ist lokal lipschitz-stetig, $X \subseteq \mathbb{R}$ offen, $g : J \to \mathbb{R}$ stetig und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

Satz 1.1. *Seien $f(\xi) \neq 0$ und X_0 das maximale Intervall um ξ in X mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X_0$.*
$F : X_0 \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit $F' = \frac{1}{f}$, $G : J \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit $G' = g$.
I sei das maximale Intervall um τ in J mit $G(I) \subseteq G(\tau) - F(\xi) + F(X_0)$.
$x : I \to X_0$: $x(t) = F^{-1}(G(t) - G(\tau) + F(\xi))$
$\Rightarrow$ x ist die maximale Lösung von (1)(2).

Beweis:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{d}{dt} F^{-1}(G(t) - G(\tau) + F(\xi)) \\
&= \frac{G'(t)}{F'(\underbrace{F^{-1}(G(t) - G(\tau) + F(\xi))}_{x(t)})} \\
&= \frac{g(t)}{\frac{1}{f(x(t))}} \\
&= g(t) f(x(t)) \\
\xi(\tau) &= F^{-1}(G(\tau) - G(\tau) + F(\xi)) = F^{-1}(F(\xi)) = \xi
\end{aligned}$$

□

Beispiel

$$x' = \frac{x^2}{t}, x(1) = 2$$

$$f(x) = x^2, g(t) = \frac{1}{t}, X = \mathbb{R}, J =]0, \infty[, \tau = 1, \xi = 2$$

$X_0 =]0, \infty[$
$F' = \frac{1}{x^2}$ auf $]0, \infty[$: $F(x) = -\frac{1}{x}$
$G' = \frac{1}{t}$ auf $]0, \infty[$: $G(t) = \ln t$
$\rightsquigarrow \underbrace{F(x(t))} - \frac{1}{x(t)} = \ln t - \ln 1 - \frac{1}{2} = G(t) - G(\tau) + F(\xi)$, $x(t) \in X_0$
$\rightsquigarrow \frac{1}{x(t)} = -\ln t + \frac{1}{2}$, $x(t) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln t}$, $\ln t = \frac{1}{2}$, $t = \sqrt{e}$, $t \in I =]0, \sqrt{e}[$

Bemerkung

1. $X_0 :=] \inf\{x \in X | \forall y \in [x, \xi] : f(y) \neq 0\}, \sup\{x \in X | \forall y \in [\xi, x] : f(y) \neq 0\}[$
2. $F(X_0)$ offenes Intervall, $F : X_0 \to F(X_0)$ streng monoton, $F^{-1} : F(X_0) \to X_0$, streng monoton
3. $G(\tau) - F(\xi) + F(X_0) := \{G(\tau) - F(\xi) + F(x) | x \in X_0\}$ ist offenes Intervall
4. $I =] \inf\{t \in J | \forall s \in [t, \tau] : G(s) - G(\tau) + F(\xi) \in F(X_0)\}, [$
5. formal:

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x)g(t)$$
$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$
$$\int_\xi^x \frac{dy}{f(y)} = \int_\tau^t g(s)ds$$
$$\Rightarrow F(x) - F(\xi) = G(t) - G(\tau)$$

Beispiel
$x' = \frac{t}{x^2+1}, x(0) = 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, X = \mathbb{R}, g(t)0t, J = \mathbb{R}, X_0 = X = \mathbb{R}$
$\int_0^x (y^2 + 1)dy = \int_0^t s ds$ auflösen nach $x \in \mathbb{R}$
$[\frac{y^3}{3} + y]_0^x = \frac{x^3}{3} + x = \frac{s^2}{2}|_0^t = \frac{t^2}{2}$
$\frac{x^3}{3} + x - \frac{t^2}{2} = 0$
Lösung durch Cardano-Formeln...

Beispiel
$x' = \frac{x}{\sin x}, x(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, f(x) = \frac{x}{\sin x}, X = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, g(t)01, J = \mathbb{R}$
$X_0 =]0, \pi[, \int_{\frac{\pi}{2}} x \frac{\sin y}{y} dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^t ds = t - \frac{\pi}{2}$

Algorithmus

1. Bestimme f und g und die „natürlichen Definitionsbereiche“ X von f und J von g.
2. Bestimme $X_1 = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$.
3. Bestimme $X_0 =] \inf\{x \in X_1 | [x, \xi] \subseteq X_1\}, \sup\{x \in X_1 | [\xi, x] \subseteq X_1\}[$
4. Löse $\int_\xi^x \frac{dy}{f(y)} = \int_\tau^t g(s)ds$ (3) nach $x \in X_0$,
   insbesondere bestimme $I = \{t \in J | (3)$ besitzt Lsg $x \in X_0\}$

1.2 Exakte Gleichungen

$$x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)} \tag{1}$$

$$x(t) = \xi \tag{2}$$

$P, Q : U \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(\tau, \xi) \in U$, $Q(\tau, \xi) \neq 0$

Satz 1.2. *Sei $P(t,x) = \partial_t V(t,x), Q(t,x) = \partial_x V(t,x)$ für alle $(t,x) \in U$.*
$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall mit $\tau \in I$
$x : I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit $V(t, x(t)) = V(\tau, \xi)$, $\forall t \in I : Q(t, x(t)) \neq 0$, $x(\tau) = \xi$
$\Rightarrow$ x ist Lösung von (1)(2).

Beweis:

$$0 = \frac{d}{dt} V(t, x(t)) = \underbrace{\partial_t V(t, x(t))}_{P(t,x(t))} + \underbrace{\partial_x V(t, x(t))}_{Q(t,x(t)) \neq 0} x'(t) \tag{3}$$

□

Problem: Wann existiert V mit $\partial_t V = P$, $\partial_x V = Q$? Diese Eigenschaften sind ein System zweier PDEs erster Ordnung bezüglich der Unbekannten V.

Vorlesung am 04.05.2009

Beispiel
$x' = \frac{x+t}{x-t}$, $x(0) = 1$
$U = \{(t,x) \in \mathbb{R} : x \neq t\}$, $P(t,x) = x + t$, $Q(t + x) = t - x$
$\partial_t V(t,x) = x + t$, $\partial_x V(t,x) = t - x$

Definition (konvex, sternförmig, einfach zusammenhängend)

1. U heißt *konvex*, wenn gilt:

   $\forall (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in U, s \in [0,1] : (st_1 + (1-s)t_2, sx_1 + (1-s)x_2) \in U$

2. U heißt *sternförmig*, wenn gilt:

   $\exists (t_0, x_0) \in U : \forall (t,x) \in U, s \in [0,1] : (st + (1-s)t_0, sx + (1-s)x_0) \in U$

3. U heißt *einfach zusammenhängend*, wenn gilt:

   $\forall \varphi : [0,1] \to U$ stetig, $\varphi(0) = \varphi(1)$:

   $\exists \psi : [0,1] \times [0,1] \to U$ stetig:

   $\forall s \in [0,1] : \psi(s, 0) = \varphi(s), \psi(s,1) = \psi_0$

   Umgangsprachlich: U hat keine Löcher.

Satz 1.3. *Sei U einfach zusammenhängend und*

$$\forall (t,x) \in U : \partial_x P(t,x) = \partial_t Q(t,x). \tag{4}$$

Dann existiert eine Lösung V von (3).

(ohne Beweis)

Algorithmus

1. Verifiziere (4)
2. Verifiziere, ob U einfach zusammenhängend ist, ggf. verkleinere U
3. Löse $\partial_t \varphi(t,x) = P(t,x)$ nach φ
4. Ansatz: $V(t,x) = \varphi(t,x) + \psi(x)$
   Löse $\psi'(x) + \partial_x \varphi(t,x) = Q(t,x)$ nach ψ.
5. Löse $V(t,x) = V(\tau,\xi)$ nach x

Beispiel

1. $\partial_x(x+t) = 1$
   $\partial_t(t-x) = 1$
2. U ist einfach zusammenhängend
3. $\partial_t \varphi(t,x) = x + t$
   $\Rightarrow \varphi(t,x) = \frac{t^2}{2} + tx$
4. $\psi'(x) = t - x - t = -x$
   $\Rightarrow \psi(x) = -\frac{x^2}{2}$
5. $V(t,x) = \frac{t^2}{2} + tx - \frac{x^2}{2}$
   $\tau = 0$, $\xi = 1$
   $V(t,x) = V(\tau,\xi) = -\frac{1}{2}$
   $\Rightarrow x^2 - 2tx - t^2 - 1 = 0$
   $\Rightarrow x_{1/2} = t \pm \sqrt{t^2+t^2+1} = t \pm \sqrt{2t^2+1}$
   $x(0) = 1 \Rightarrow x(t) = t + \sqrt{2t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$

1.3 Koordinatentransformation

$$x' = f(t,x) \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi \tag{2}$$

$f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar, $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(\tau,\xi) \in U$
$x = \varphi(t,y)$, $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar, $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $\forall (t,y) \in V : (t, \varphi(t,y)) \in U$

Satz 1.4. *Sei* $\forall (t,y) \in V : \det \partial_y \varphi(t,y) \neq 0$ *und*

$$g(t,y) := \partial_y \varphi(t,y)^{-1} \left(f(t,\varphi(t,y)) - \partial_t \varphi(t,y) \right)$$

für $(t,y) \in V$.
Dann gilt:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $\tau \in I$ und $y : I \to \mathbb{R}^n$ (stetig diff'bar) Lösung von

$$y' = g(t,y) \forall t \in I \tag{3}$$
$$\varphi(\tau, y(\tau)) = \xi \tag{4}$$

$x : I \to \mathbb{R}^n$, $x(t) = \varphi(t, y(t))$
$\Rightarrow x$ ist Lösung von (1)(2).

Beweis:

$$\begin{aligned} x' &= \partial_t \varphi(t,y) + \partial_y \varphi(t,y) y' \\ &= \partial_t \varphi(t,y) + \underbrace{\partial_y \varphi(t,y) \partial_y \varphi(t,y)^{-1}}_{=I} (f(t, \varphi(t,y)) - \partial_t \varphi(t,y)) \\ &= f(t,x) \\ x(\tau) &= \varphi(\tau, y(\tau)) = \xi \end{aligned}$$

□

Bemerkung
Im Fall $n = 1$ erhalten wir als Voraussetzung $\partial_y \varphi(t,y) \neq 0$, d.h. $\varphi(t,y)$ ist streng monoton.
$\Rightarrow x = \varphi(t,y)$ ist auflösbar bzgl. y.
$n > 1$ $\det \partial_y \varphi(t,y) \neq 0$, $\varphi(t,\cdot)$ kann nicht bijektiv sein.
Genauer: Es existieren stetig diff'bare Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\forall y \in \mathbb{R}^2 : \det \varphi'(y) \neq 0$, aber φ ist nicht injektiv.

Beispiel
$x' = \sqrt{1-x^2}$, $x(0) = 0$, $U = \mathbb{R} \times]-1,1[$
$x = \sin y$, $V = \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$g(t,y) = (\cos y)^{-1} \left(\sqrt{1-(\sin y)^2} - 0\right) = \frac{\cos y}{\cos y} = 1$
$y' = 1$, $\sin y(0) = 0$
$\Rightarrow y(t) = t$
$\Rightarrow x(t) = \sin t$

1.3.1 Beispielklasse: Homogene Gleichungen

$x' = F(\frac{x}{t})$, $x(\tau) = \xi$, $\tau \neq 0$
$x = ty$: $y' = \frac{F(y)-y}{t}$, $\tau y(\tau) = \xi$
$\rightsquigarrow$ Gleichung mit getrennten Variablen

1.3.2 Beispielklasse: $x' = F(at + bx + c)$

$y = at + bx + c = \psi(t,x)$ (entspricht $x = \frac{1}{b}(y - at - c) = \varphi(t,x)$, $b \neq 0$)
$y' = bF(y) + a$, $y(\tau) = a\tau + b\xi + c$
$\rightsquigarrow$ autonome Gleichung

Vorlesung am 06.05.2009

1.3.3 Beispielklasse: Rotationssymmetrische Vektorfelder

Satz und Definition: rotationssymmetrisch/-invariant
Seien $S_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S_{\frac{\pi}{2}}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Es gelte $\forall x \in \mathbb{R}^2, \vartheta \in \mathbb{R}$: $f(S_\vartheta x) = S_\vartheta f(x)$.
Dann heißt f *rotationssymmetrisch* (bzw. *rotationsinvariant*), und es existieren $F, G : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = F(\|x\|)x + G(\|x\|)Tx$$

Beweis:
Seien $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \neq 0$ (insbesondere $x \neq 0$) und x, Tx Basis in $\mathbb{R}^2$.
$f(x) = F(x)x + G(x)Tx$ mit $F(x), G(x) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(S_\vartheta x) &= F(S_\vartheta x)S_\vartheta x + G(S_\vartheta x)TS_\vartheta x \\ &= S_\vartheta f(x) = S - \vartheta(F(x)x + G(x)Tx) \\ S_\vartheta(F(S_\vartheta x)x + G(S_\vartheta x)Tx) \end{aligned}$$

mit $F(x) = F(S_\vartheta x) = \tilde{F}(\|x\|)$ und $G(x) = G(S_\vartheta x) = \tilde{G}(\|x\|)$.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = F\left(x_1^2, x_2^2\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + G\left(x_1^2 + x_2^2\right) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, r, \vartheta) = r\cos\vartheta \\ x_2 &= \varphi_2(t, r, \vartheta) = r\sin\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{(r,\vartheta)}\varphi(r,\vartheta) &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} r' \\ \vartheta' \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix}^{-1}}_{=\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\frac{1}{r}\sin\vartheta & \frac{1}{r}\cos\vartheta \end{pmatrix}} \left(F\left(r^2\right) \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix} + G\left(r^2\right) \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} F\left(r^2\right) r \\ G\left(r^2\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *Entkoppeltes System*:
$r' = F(r^2)r$ (*Amplitudengleichung*), $\vartheta' = G(r^2)$ (*Phasengleichung*)

1.4 Einige Gleichungen 2. Ordnung

1.4.1 $x'' = f(t, x')$, $x(\tau) = \xi_0$, $x'(\tau) = \xi_1$

$x' = y$: $y' = f(t, y)$, $y(\tau) = \xi_1$
$x(t) = \xi_0 + \int_\tau^t y(s)ds$

Beispiel
$x'' = \frac{t}{x}$, $x(1) = x'(1) = 1$
$y' = \frac{t}{y}$, $y(1) = 1$

$$\int_1^y zdz = \int_1^t sds$$
$$\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y = t$, $t > 0$

$$x = 1 + \int_1^t sds = 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}, \quad t > 0$$

1.4.2 $x'' = f(x, x')$, $x(\tau) = \xi_0$, $x'(\tau) = \xi_1$

$x' = \varphi(x)$: $x'' = \varphi'(x)x' = \varphi'(x)\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$
$\varphi'(x) = \frac{f(x,\varphi(x))}{\varphi(x)}$, $\varphi(\xi_0) = \xi_1$
$\int_{\xi_0}^x \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_\tau^t ds = t - \tau$

Beispiel
$x'' = -\frac{(x')^2}{5x}$, $x(0) = x'(0) = 1$

$$\varphi' = -\frac{\varphi^2}{5x\varphi} = -\frac{\varphi}{5x}, \varphi(1) = 1$$
$$\int -1^\varphi \frac{d\psi}{\psi} = -\int -1^x \frac{dy}{5y} = \ln\varphi = -\frac{1}{5}\ln x$$
$$\varphi(x) = x^{-\frac{1}{5}}$$
$$\int_1^x \frac{dy}{y^{-\frac{1}{5}}} = t$$
$$\frac{5}{6} y^{\frac{6}{5}} |_{y=1}^{y=x} = \frac{5}{6}\left(x^{\frac{6}{5}} - 1\right)$$
$$x(t) = \left(\frac{6}{5}t + 1\right)^{\frac{5}{6}}, t > -\frac{5}{6}$$

1.4.3 $x'' = f(x)$, $x(\tau) = \xi_0$, $x'(\tau) = \xi_1$

$x' = \varphi(x)$: $\varphi' = \frac{\varphi(x)}{\varphi}$, $\varphi(\xi_0) = \xi_1$

$$\int_{\xi_1}^\varphi \psi d\psi = \int_{\xi_0}^x f(y)dy = \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\xi_1^2}{2}$$
$$\varphi = \pm\sqrt{2\int_{\xi_0}^x f(y)dy + \frac{{\xi_1}^2}{2}}$$

$$\int_{\xi_1}^{\varphi} \psi d\psi = \int_{\xi_0}^{x} f(y)dy = \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\xi_1^2}{2}$$
$$\frac{x'(t)^2}{2} - \int_{\xi_0}^{x(t)} f(y)dy = \frac{\xi_1^2}{2} = const \text{ bzgl. } t$$

(Energieerhaltung: kin. Energie + pot. Energie)

1.5 Autonome Systeme 2. Ordnung

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x,y), \quad x(\tau) = \xi \\ y' &= f_2(x,y), \quad y(\tau) = \eta \end{aligned}$$

$x'(\tau) = f(\xi, \eta) \neq 0$
$y = \varphi(x)$:
$y' = \varphi'(x)x' = \varphi'(x)f(x, \varphi(x)) = g(x, \varphi(x)$
$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{g(x,\varphi(x))}{f(x,\varphi(x))}$, $\varphi(\xi) = \eta \rightsquigarrow \varphi$
$\Rightarrow x' = f(x, \varphi(x))$, $x(\tau) = \xi \rightsquigarrow x \rightsquigarrow y = \varphi(x)$

Vorlesung am 11.05.2009

Beispiel
$x' = x + \frac{2}{y}$, $x(0) = -1$
$y' = y^2(x + \frac{2}{y})$, $x(0) = 1$

$f(\xi, \eta) = -1 + \frac{2}{1} = 1 \neq 0$
$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)^2(x+\frac{2}{\varphi(x)})}{x+\frac{2}{\varphi(x)}} = \varphi(x)^2$, $\varphi(-1) = 1$:

$$\int_1^{\varphi(x)} \frac{d\psi}{\psi^2} = \int_{-1}^{x} dy = x + 1 = -\frac{1}{\psi}\Big|_1^{\varphi(x)} = -\frac{1}{\varphi(x)} + 1$$

$\Rightarrow \varphi(x) = -\frac{1}{x}$
$\Rightarrow x' = x + \frac{2}{-\frac{1}{1}x} = x - 2x = -x$, $x(0) = -1$

$$\int_{-1}^{x} \frac{dy}{y} = -\int_0^t ds = \ln|x| = -t = \ln(-x)$$

$\Rightarrow -x = e^{-t}$, $x = -e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$
$y = -\frac{1}{-e^{-t}} = e^t$, $t \in \mathbb{R}$

Kapitel 2

Abhängigkeit der Lösungen von den Daten

$$x' = f(t,x,\lambda) \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi \tag{2}$$

$f \in C^k(U \times \Lambda, \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ offen
$t \in]t_-(\tau,\xi,\lambda), t_+(\tau,\xi,\lambda)[\mapsto \hat{x}(t,\tau,\xi,\lambda) \in \mathbb{R}^n$ maximale Lösung von (1)(2).

Beispiel

$$x' = tx^\lambda \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi \tag{2}$$

$U = \mathbb{R}\times]0,\infty[$, $f(t,x,\lambda) = tx^\lambda$, $m = n = 1$, $\Lambda =]-\infty, 0[$

$$\int_\xi^x \frac{dy}{y^\lambda} = \int_\tau^t s ds$$
$$\frac{t^2}{2} - \frac{\tau^2}{2} = \frac{1}{1-\lambda} y^{1-\lambda}|_{y=\xi}^{y=x} = \frac{1}{1-\lambda}\left(x^{1-\lambda} - \xi^{1-\lambda}\right)$$
$$\Rightarrow x = \left(\frac{1-\lambda}{2}(t^2-\tau^2) + \xi^{1-\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = \hat{x}(t,\tau,\xi,\lambda)$$

für $\frac{1-\lambda}{2}(t^2-\tau^2) + \xi^{1-\lambda} > 0$, d.h. $t^2 - \tau^2 + \frac{2}{1-\lambda}\xi^{1-\lambda} > 0$
$\Rightarrow t_- = -\infty$, $t_+ = \infty$, falls $\tau^2 < \frac{2}{1-\lambda}\xi^{1-\lambda}$
Für $\tau^2 > \frac{2}{1-\lambda}\xi^{1-\lambda}$ erhalten wir $(t_-, t_+) = \left(-\infty, -\sqrt{\tau^2 - 2\frac{1}{1-\lambda}\xi^{1-\lambda}}\right)$ für $\tau < 0$ und
$(t_-, t_+) = \left(\sqrt{\tau^2 - 2\frac{1}{1-\lambda}\xi^{1-\lambda}}, \infty\right)$ für $\tau > 0$

Satz 2.1.

1. *$D = \{(t,\tau,\xi,\lambda) \in \mathbb{R} \times U \times \Lambda \big| t_-(\tau,\xi,\lambda) < t < t_+(\tau,\xi,\lambda)\}$ ist offen.*
2. *$\hat{x} \in C^k(D, \mathbb{R}^n)$*
3. *Sei $A(t) = \partial_\xi \hat{x}(t,\tau,\xi,\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*
   Dann gilt $\forall(t,\tau,\xi,\lambda) \in D: A'(t) = \partial_x f(t, \hat{x}(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)A(t)$ und $A(\tau) = I$.
4. *Sei $B(t) = \partial_\lambda \hat{x}(t,\tau,\xi,\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times m}$.*
   Dann gilt $B'(t) = \partial_x f(t, \hat{x}(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)B(t) + \partial_\lambda(t, \hat{x}(t,\tau,\xi,\lambda)$ und $B(\tau) = 0$.

$\hat{x}(t,\tau,\xi,\lambda) \approx \hat{x}(t,\tau,\xi_0,\lambda) + \partial_\xi \hat{x}(t,\tau,\xi_0,\lambda)(\xi - \xi_0)$

2.1 Prozesse

Satz 2.2. *Sei $t, s \in]t_-(\tau,\xi), t_+(\tau,\xi)[$, dann gilt für alle $(\tau,\xi) \in U$:*

$$\begin{aligned} t_\pm(s, \hat{x}(s,\tau,\xi)) &= t_\pm(\tau,\xi) \\ \hat{x}(t,s,\hat{x}(s,\tau,\xi)) &= \hat{x}(t,\tau,\xi) \end{aligned} \tag{3}$$

Insbesondere gilt $\hat{x}(t,s,\hat{x}(s,t\xi)) = \hat{x}(t,t,\xi) = \xi$.

Satz und Definition
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\hat{x}: \mathbb{R}^2 \times X \to X$ mit $\hat{x}(t,s,\hat{x}(s,\tau,\xi)) = \hat{x}(t,\tau,\xi)$ für alle $t,\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in X$. Dann heißt $\hat{x}$ *Prozess*, $\hat{x}(t,s,\cdot)$ ist bijektiv und $\hat{x}(t,s,\cdot)^{-1} = \hat{x}(s,t,\cdot)$.

Vorlesung am 13.05.2009

Beweis:
$\partial_t \hat{x}(t,s,\hat{x}(s,\tau,\xi)) = f(t, \hat{x}(t,s,\hat{x}(s,\tau,\xi))$
$\hat{x}(s,s,\hat{x}(s,\tau,\xi)) = \hat{x}(s,\tau,\xi)$ □

2.2 Flüsse

$$x' = f(x) \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi \tag{2}$$

$U = \mathbb{R} \times X$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(X, \mathbb{R}^n)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in X$

Satz 2.3. *Für alle $\tau, s \in \mathbb{R}$, $t_-(\tau,\xi) < t < t_+(\tau,\xi)$ gilt:*

$$\begin{aligned} t_\pm(\tau+s,\xi) &= t_\pm(\tau,\xi) + s \\ \hat{x}(t,\tau,\xi) &= \hat{x}(t+s,\tau+s,\xi) \end{aligned} \tag{4}$$

Beweis:
$t \mapsto x(t)$ Lösung von (1)
$\Rightarrow t \mapsto x(t+s)$ ist Lösung von (1) für alle $s \in \mathbb{R}$.
$t \in]t_-(\tau,\xi)+s, t_+(\tau,\xi)+s[\mapsto \hat{x}(t-s,\tau,\xi)$ ist maximale Lösung mit Anfangszeit $\tau + s$

Folgerung

$$\hat{x}(t,\tau,\xi) \overset{(3)}{=} \hat{x}(t,\sigma,\hat{x}(\sigma,\tau,\xi)) \overset{(4)}{=} \hat{x}(t+s,\tau+s,\xi) \tag{5}$$

Insbesondere $\hat{x}(t,\tau,\xi) = \hat{x}(t-\tau,0,\xi)$
$\Rightarrow$ bei autonomen System: o.B.d.A. $\tau = 0$

$$\Rightarrow \varphi_{t+s}(\xi) = \varphi_t(\varphi_s(\xi)) \tag{6}$$

Aus (5) mit $\tau = -s$ und $\sigma = 0$ erhält man:

$$\underbrace{\hat{x}(t,0,\underbrace{\hat{x}(0,-s,\xi)}_{\overset{(3)}{=}\hat{x}(s,0,\xi))}}_{\varphi_t(\varphi_s(s))} = \hat{x}(t+s,0,\xi)$$

Definition
Eine Abbildung $(t,\xi) \in \mathbb{R} \times X \mapsto \varphi_t(\xi) \in X$ mit (6) heißt *Fluss* (oder *einparametrische Diffeomorphismengruppe*, wenn $k \geq 1$).
(6) $\Rightarrow \varphi_t(\varphi_{-t}(\xi)) = \xi$ für alle $\xi \in X$
$\Rightarrow \varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ ist Diffeomorphismus von X auf X
$\Rightarrow t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_t$ ist ein Gruppen-Homomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Diffeomorphismen $X \to X$.

Beispiel
$x' = x^{-2}$ und $x(\tau) = \xi > 0$
$\hat{x}(t,\tau,\xi) = \frac{1}{\tau - t + \frac{1}{\xi}}$ für $t < \tau + \frac{1}{\xi} = t_+(\tau,\xi)$, $t_-(\tau,\xi) = -\infty$
$\varphi_t(\xi) = \frac{1}{\frac{1}{\xi} - t}$

$$\varphi_{t+s}(\xi) = \frac{\xi}{1-(t+s)\xi} = \varphi_t(\varphi_s(\xi)) = \frac{\frac{\xi}{1-s\xi}}{1 - t\frac{\xi}{1-s\xi}} = \frac{\xi}{1-s\xi-t\xi} = \frac{\xi}{1-(t+s)\xi}$$

$\hat{x}(t,s,\hat{x}(s,\tau,\xi)) = \hat{x}(t,\tau,\xi)$

Kapitel 3

Lineare Gleichungen und Systeme

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi \tag{2}$$

$A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n \times n)$ stetig, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

Satz 3.1. *Die maximale Lösung von (1)(2) ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*

Beweis:
Sei z.B. $t_+ < \infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &= \left\| \xi + \int_\tau^t (A(s)x(s) + b(s)ds \right\| \\
&\leq \|\xi\| + \int_\tau^t \|A(s)x(s)\| + \|b(s)\|ds \\
&\leq \|\xi\| + \int_\tau^t \|A(s)\| \cdot \|x(s)\| + \|b(s)\|ds \\
&\leq \|\xi\| + \max_{0 \leq s \leq t_+} \|A(s)\| \int_\tau^t \|x(s)\| + \int_\tau^{t_+} \|b(s)\|ds \\
\overset{\text{Gronwall}}{\Rightarrow} \|x(t)\| &\leq \left(\|\xi\| + \int_\tau^{t_+} \|b(s)\|ds \right) e^{\max_{0 \leq s \leq t_+} \|A(s)\|(t-\tau)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x(t)\| \not\to \infty$ bei $t \nearrow t_+$
$\Rightarrow$ Widerspruch

3.1 Algebraische Eigenschaften der Lösungsabbildung und der Lösungsmenge

Zu (1) gehörende homogene Gleichung:

$$x' = A(t)x \tag{3}$$

1. Sei $t \in \mathbb{R} \mapsto \hat{x}(t, \tau, \xi) \in \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung von (3)(2). Dann ist $\hat{x}(t, \tau, \cdot)$ linear, d.h. $\hat{x}(t, \tau, \xi) = X(t, \tau)\xi$ mit einer Matrix $X(t, \tau) \in \mathbb{M}(n \times n)$.

2.
$$\hat{x}(t,\tau,\xi) = X(t,\tau)\xi = \hat{x}(t,s,\hat{x}(s,\tau,\xi)) = X(t,s)X(s,\tau)\xi$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow X(t,\tau) &= X(t,s)X(s,\tau) \quad \forall t,s,\tau \in \mathbb{R} \\
X(t,t) &= I \\
X(t,s)^{-1} &= X(s,t) \\
\det X(t,s) &> 0 \\
\partial_t(X(t,\tau)\xi) &= A(t)X(t,\tau)\xi = \partial_t X(t,\tau)\xi \\
\Rightarrow \partial_t X(t,\tau) &= A(t)X(t,\tau), X(\tau,\tau) = I
\end{aligned}$$

3. die Menge der Lösungen von (3) ist ein Vektorraum der Dimension n (Dimension von A).

4. Seien $x_1,\ldots,x_n$ Lösungen von (3), dann gilt $\det(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \neq 0$ für ein $t \in \mathbb{R}$, d.h. $x_1,\ldots,x_n$ sind eine Basis der Menge aller Lösungen von (3). (a) In diesem Fall nennt man $x_1,\ldots,x_n$ Fundamentalsystem von Lösungen von (3).

   Hieraus folgt auch $\forall t \in \mathbb{R} : \det(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \neq 0$. (b)

5. Die Menge aller Lösungen von (1) ist ein n-dimensionaler affiner Unterraum des Vektorraums aller stetig diff'baren Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, genauer:

   Sei x_* eine Lösung von (1), dann gilt

$$\underbrace{\{x|x \text{ ist Lösung von (1)}\}}_{\text{allgemeine Lösung von (1)}} = \underbrace{x_*}_{\text{partikuläre Lösung von (1)}} + \underbrace{\{x|x \text{ ist Lösung von (3)}\}}_{\text{allgemeine Lösung von (3)}}$$

6. Analog für Gleichungen höherer Ordnung:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_0(t)x = b(t) \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi_0, x'(\tau) = \xi_1, ..., x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \tag{2}$$
$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_0(t)x = 0 \tag{3}$$
$$y_1 := x, y_2 := x', ..., y_n := x^{(n)}$$

   Lösungen von $x_1,...,x_n$ von (3) sind genau dnan linear unabhängig, wenn

$$\det\begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

   für ein t. Dies ist Äquivalent zu

$$\det\begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

   für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese Determinante wird auch als *Wronski-Determinante* von $x_1,...,x_n$ bezeichnet.

Beweis:

1.

$$\begin{aligned}
\partial_t(\alpha\hat{x}(t,\tau,\xi)+\beta\hat{x}(t,\tau,\eta)) &= \alpha\underbrace{\partial_t\hat{x}(t,\tau,\xi)}_{A(t)\hat{x}(t,\tau,\xi)}+\beta\underbrace{\partial_t\hat{x}(t,\tau,\eta)}_{A(t)\hat{x}(t,\tau,\eta)} \\
&= A(t)\left(\alpha\hat{x}(t,\tau,\xi)+\beta\hat{x}(t,\tau,\eta)\right) \\
[\alpha\hat{x}(t,\tau,\xi)+\beta\hat{x}(t,\tau,\eta)]_{t=\tau} &= \alpha\xi+\beta\eta \\
&= \hat{x}(t,\tau,\alpha\xi+\beta\eta)
\end{aligned}$$

□

2.

3. (a) Wenn x, y Lösungen von (3) und $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ sind, dann ist auch $\alpha x+\beta y$ eine Lösung von (3):
   $(\alpha x+\beta y)'=\alpha x'+\beta y'=\alpha A(t)x+\beta A(t)y=A(t)(\alpha x+\beta y)$
   (b) $\dim\geq n$:
   $X(t,0)e_j$, $i=1,\ldots,n$ linear unabhängig:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\alpha_j X(t,0)e_j &= 0 \\
X(t,0)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j &= 0 \\
\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j &= 0 \\
\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n &= 0
\end{aligned}$$

   (c) $\dim\leq n$:
   Seien $x_1,\ldots,x_{n+1}$ Lösungen von (3), $\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j x_j(0)=0$, $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_{n+1}^2>0$
   $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j \underbrace{x_j(t)}_{X(t,0)x_j(0)} = X(t,0)\underbrace{\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j x_j(0)}_{=0}\equiv 0$
   $\Rightarrow x_1,\ldots,x_{n+1}$ sind linear abhängig. □

4. (a) $\det(x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0))\neq 0$
   $\Rightarrow x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0)$ sind linear unabhängig als Vektoren in $\mathbb{R}^n$.
   $\sum_{j=1}^{n}\alpha\underbrace{x_j(t)}_{X(t,t_0)x_j(t_0)} = 0 = X(t,t_0)\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j(t_0)}_{=0}\Rightarrow\alpha_1,\ldots,\alpha_n=0$
   (b) Seien $x_1,\ldots,x_n$ Lösungen von (3) (linear unabhängig) $t\in\mathbb{R}$ beliebig.
   $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j(t)=0$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\underbrace{x_j(s)}_{X(s,t)x_j(t)} = X(s,t)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j(t)\equiv 0$$

5. x ist genau dann Lösung von (1), wenn $x - x_*$ eine Lösung von (3) ist.
   (a) "$\Rightarrow$":
   $(x - x_*)' = x' - x_*' = A(t)x + b(t) - (A(t)x_* + b(t)) = A(t)(x - x_*)$
   (b) "$\Leftarrow$":
   $x' = (x - x_*)' + x_*' = A(t)(x - x_*) + A(t)x_* + b(t) = A(t)x + b(t)$

Beispiel
$n = 1$
$\ln x = \int_1^x \frac{dy}{y} = \int_\tau^t A(s)ds$
$\Rightarrow X(t,\tau) = e^{\int_\tau^t A(s)ds}$

Vorlesung am 18.05.2009

Definition (Lineare Unabhängigkeit von Vektorfunktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$)
$x_1, ..., x_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\sum_{j=1}^k \alpha_j x_j(t) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Bemerkung
Wenn $x_1, ..., x_k$ Lösungen von (3) sind, dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_k(t) = 0 \text{ in einem } t \;\Leftrightarrow\; \forall t : \sum_{j=1}^k \alpha_j x_j(t) = 0.$$

Beispiel
$n = 2$
$x'' - \frac{2x}{1+t^2} = 0$, $a_1(t) = 0$, $a_0(t) = -\frac{1}{1+t^2}$
$x_1 = 1 + t^2$, $x_2 = t + (1 + t^2)\arctan t$
$\det \begin{pmatrix} 1+t & t + (1+t^2)\arctan t \\ 2t & 2 + 2t\arctan t \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$
$\Rightarrow x_1, x_2$ sind linear unabhängig.

Bemerkung
Anderer (klassischer) Weg der Verifikation der linearen Unabhängigkeit von x_1, x_2:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \\ &= \alpha_1(1 + t^2) + \alpha_2(t + (1 + t^2)\arctan t) \end{aligned}$$

Mit $t = 0$ erhalten wir $\alpha_1 = 0$ und mit $t = 2$ erhalten wir auch $\alpha_2 = 0$.

3.2 Der Satz von Liouville

$x' = A(t)x$, $x(\tau) = \xi$, $x = X(t,\tau)\xi$

Satz 3.2.

$$\det X(t,\tau) = e^{\int_\tau^t \mathrm{tr} A(s)ds}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
X(t,\tau) &= (x_1(t,\tau),...,x_n(t,\tau))\varepsilon_{j_1,...,j_n}x_{1,j_1}(t,\tau)\cdot ...\cdot x_{n,j_n}(t,\tau)\\
\partial - t\det X(t,\tau) &= \sum_{j_1,..,j_n=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{j_1,...,j_n}x-1,j_1(t,\tau)\cdot ...\cdot \partial_t x_{k,j_k}(t,\tau)\cdot ...\cdot x_{n,j_n}(t,\tau)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\det\begin{pmatrix}x_1(t,\tau) & \cdots & \partial_t x_k(t,\tau) & \cdots & x_n(t,\tau)\end{pmatrix}\\
A(t) &= (a_{j,k}(t))_{j,k=1,...,n},\\
\partial_t x_{i,j}(t,\tau) &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(t)x_{k,j}(t,\tau)\\
\partial_t \det X(t,\tau) &= \sum_{k=1}^{n}\det(x_1(t,\tau),...,A(t)x_k(t,\tau),...,x_n(t,\tau))\\
\partial_t \det X(t,\tau)|_{t=\tau} &= \sum_{k=1}^{n}\det\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k}(t) & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \ddots & 0 & a_{2,k}(t) & 0 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,k}(t) & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\\
\partial_t \det X(t,\tau)|_{t=s} &= \partial_t\det(X(t,s)X(s,\tau))|_{t=s}a_{k,k}(t)\\
&= \underbrace{\partial_t \det X(t,s)|_{t=s}}_{\mathrm{tr}A(s)}\det X(s,\tau)\\
&= \mathrm{tr}A(s)\det X(s,\tau) = \partial_t\det X(s,\tau)
\end{aligned}
$$

Letzteres ist eine Differenzialgleichung für $\det X(\cdot,\tau)$ in getrennten Variablen, d.h. wir erhalten

$$\det X(s,t) = e^{\int_\tau^s A(\sigma)d\sigma}$$

$\square$

Bemerkung
$\Omega_t := \{X(t,\tau)\xi | \xi\in\Omega\}$
$\det X(t,\tau) = \sum_{j_1,...,j_n=1}^{n}$

$$
\begin{aligned}
vol(\Omega_t) &= \int_{\Omega_t} dx\\
&\overset{x=X(t,\tau)}{=\!=\!=} \int_\Omega |\det X(t,\tau)|d\xi\\
&= \underbrace{e^{\int_\tau^t \mathrm{tr}A(s)ds}}_{\text{Volumenänderungsfaktor}}\underbrace{\int_\Omega d\xi}_{vol(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Vorlesung am 20.05.2009

3.3 Lineare homogene autonome Systeme

$$x' = Ax, A \in \mathbb{M}(n \times n) \tag{1}$$

3.3.1 Ein Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} specA &= \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v, v \neq 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} | \det(A - \lambda I) = 0\} \\ &= \{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \text{ mit } \lambda_j \neq \lambda_k, j \neq k, 1 \leq m \leq n \end{aligned}$$

$g_j = \dim \ker(A - \lambda_j I)$ ist die *geometrische Vielfachheit* von λ_j.
$a_j = \max\{k \in \mathbb{N} | \frac{d^l}{\lambda^l} \det(A - \mu I)|_{\mu=\lambda_j} = 0$ für $0 \leq l \leq k\}$ ist die *algebraische Vielfachheit*.
$1 \leq g_j \leq a_j \leq n$, $\sum_{j=1}^m a_j = n$
Insbesondere: $a_1 = ... = a_m = 1 \Rightarrow m = n$, $g_1 = ... = g_m = 1$

Bemerkung
Jordan-Basis und deren Eigenschaften $\{v_{j,k,l} | j = 1, ..., m; k = 1, ..., g_j; l = 1, ..., b_{j,k}\}$ ist eine Basis in $\mathbb{C}^n$.

- $\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{g_j} b_{j,k} = n$
- $\sum_{k=1}^{g_j} b_{j,k} = a_j$
- $Av_{j,k,1} = \lambda_j v_{j,k,1}$, $Av_{j,k,l} = \lambda_j v_{j,k,l} + v_{j,k,l-1}$, $2 \leq l \leq b_{j,k}$
- Seien $\lambda_1, ..., \lambda_{m_0} \notin \mathbb{R}$, $\overline{\lambda}_1 = \lambda_{m_0+1}, ..., \overline{\lambda}_{m_0} = \lambda_{2m_0}$ und $\lambda_{2m_0+1}, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$.
  $\Rightarrow 2m_0 \leq n$
  $\overline{v}_{j,k,l} = v_{j+m_0,k,l}$, $1 \leq j \leq m_0$
  $v_{j,k,l} \in \mathbb{R}^n$ für $2m_0 + 1 \leq j \leq m$
  $\Rightarrow \{Rev_{j,k,l}, Imv_{j,k,l} | 1 \leq j \leq m_0\} \cup \{v_{2m_0+1}, ..., v_m\}$ bilden eine Basis in $\mathbb{R}^n$.

Satz 3.3. *Das folgende System von (Vektor-)Funktionen bildet ein Fundamentalsystem von Lösungen zu (1).*

$$\begin{aligned} Re\left(e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} v_{j,k,l-r}\right) &\quad , 1 \leq j \leq m_0, 1 \leq k \leq g_j, 1 \leq l \leq b_{j,k} \\ Im\left(e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} v_{j,k,l-r}\right) &\quad , 1 \leq j \leq m_0, 1 \leq k \leq g_j, 1 \leq l \leq b_{j,k} \\ e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} v_{j,k,l-r} &\quad , 2m_0 + 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq g_j, 1 \leq l \leq b_{j,k} \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}v_{j,k,l-r} &= \lambda_j e^{\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}v_{j,k,l-r} + e^{\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}v_{j,k,l-r} \\
&= e^{\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-2}\frac{t^r}{r!}\left(\lambda_j v_{j,k,l-r} + v_{j,k,l-r-1}\right) + e^{\lambda_j t}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\lambda_j v_{j,k,1} \\
&= A\left(e^{\lambda_j t}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^r}{r!}v_{j,k,l-r}\right)
\end{aligned}$$

□

3.3.2 Der Fall $n = 2$

$$x' = ax + by, y' = cx + dy \tag{1}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$

$$\begin{aligned}
\lambda_{1/2} &= \frac{1}{2}\left(a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right) \\
A - \lambda_{1/2}I &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(a - d \mp \sqrt{(a-d)^2+4bc}\right) & b \\ c & \frac{1}{2}\left(d - a \mp \sqrt{(a-d)^2+4bc}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$(a-d)^2 \neq 4bc$ **(generisch)**
$m = n = 2 \Rightarrow a_1 = a_2 = 1$

$$v_{1,1,1} = \begin{cases} (2b, d - a + \sqrt{(a-d)^2+4bc}) & , b \neq 0 \\ (0,1) & , b = 0, a < d \\ (2(a-d), c) & , b = 0, a > d \end{cases}$$

$(a-d)^2 = -4bc$
$m = 1$, $n = 2$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & b \\ c & -\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$$

1. $b \neq 0$ oder $c \neq 0$ (generisch in dieser Klasse)

   $g_1 = 1 < a_2 = 2$ (nicht halbeinfache Eigenwerte)

   $v_{1,1,1} = \begin{cases} (b, -\sqrt{-bc}) & , b \neq 0 \\ (0,1) & , b = 0 \end{cases}$

   $Av_{1,1,2} = \lambda_1 v_{1,1,2} + v_{1,1,1}$

   $b \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & b \\ c & -\sqrt{-bc} \end{pmatrix} v_{1,1,2} = \begin{pmatrix} b \\ -\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$, $v_{1,1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $b = 0$: analog

2. $b = c = 0$

   $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $g_1 = a_1 = 2$ (halbeinfache Eigenwerte)

   $v_{1,1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_{1,2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vorlesung am 25.05.2009

Fundamentalsystem
Gegeben ist $x' = Ax$ mit $A \in \mathbb{M}(n \times n)$.
$e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} v_{j,k,l-r}$
$Re[...] = e^{Re\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} (\cos Im\lambda_j t Rev_{j,k,l-r} - \sin Im\lambda_j t Imv_{j,k,l-r})$
$Im[...] = e^{Re\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} (\cos Im\lambda_j t Imv_{j,k,l-r} + \sin Im\lambda_j t Rev_{j,k,l-r})$

3.3.3 Die Exponentialfunktion für Matrizen

$$x' = Ax \tag{1}$$
$$x(0) = \xi \tag{2}$$

$x = X(t, 0)\xi = X(t)\xi$

$$X(s + t) = X(s)X(t) \tag{3}$$

Satz 3.4. *Es existiert genau eine stetige Matrixfunktion $X : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n \times n)$ mit (3) und vorgegebenem $X(0)$, nämlich $X(t) = X(1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(At)^j}{j!}$. Dise Funktion ist glatt.*

Folgerung
Die Lösung von (1)(2) ist $x = \exp(At)\xi$.

Lemma 3.1. *Sei $M \subseteq \mathbb{M}(n \times n)$ beschränkt. Dann konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \exp(A)$ gleichmäßig in M.*

Beweis:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=k}^{l} \frac{A^j}{j!} \right\| &\leq \sum_{j=k}^{l} \frac{\|A^j\|}{j!} \leq \sum_{j=k}^{l} \frac{\|A\|^j}{j!} \\ &\leq \sum_{j=k}^{l} \frac{(\sup_{A \in M} \|A\|)^j}{j!} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

für $k \geq k_0(\varepsilon)$, $l \geq k$, $A \in M$. □

Beispiel
$n = 2,\ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$\exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} a^j & 0 \\ 0 & b^j \end{pmatrix}}{j!} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} a^j j! & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{\infty} b^j j! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$

Rechenregeln

- $\det A \neq 0 \Rightarrow \exp(A^{-1}BA) = A^{-1}(\exp B)A$ für alle $B \in \mathbb{M}(n \times n)$
- $AB = BA \Rightarrow \exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$
- $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$

Beweis:

- $A^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{-1}B^jA}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A^{-1}BA)(A^{-1}BA)...(A^{-1}BA)}{j!} = \exp(A^{-1}BA)$
- $AB \Rightarrow (A + B)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}^j B^{m-j}$ wie in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$
- $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{j-k}}{(j-k)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \underbrace{\sum_{k=0}^{j} \underbrace{\frac{j!}{k!(j-k)!}}_{\binom{j}{k}} A^k B^{j-k}}_{(A+B)^j}$

Lemma 3.2. $\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At)$

Beweis:
$\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(At)^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(At)^{j-1}}{(j-1)!} A = A \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(At)^{j-1}}{(j-1)!}$ □

Vorlesung am 27.05.2009

3.3.4 Gleichungen höherer Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_1x' + a_0x = 0, a_j \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Definition
Das charakterististische Polynom zu (1) ist $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n+1} + ... + a_1\lambda + a_0$.

Satz 3.5. *Folgende n Funktionen bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen von (1):*

- $t^l e^{\alpha t} \cos \beta t$, $t^l e^{\alpha t} \sin \beta t$: $p(\alpha + i\beta) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $l = 0, ..., a - 1$
- $t^l e^{\lambda t}$: $P(\lambda) = 0$, $l = 0, ..., a - 1$

Dabei ist $a \in \{1, ..., n\}$ die Vielfachheit der Nullstelle $\alpha + i\beta$ bzw. λ von P.

(ohne Beweis)

3.4 Lineare inhomogene Gleichungen und Systeme

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi \tag{2}$$
$$x' = A(t)x \tag{3}$$

$A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $x = X(t,\tau)\xi$ ist Lösung von (2)(3).

Satz 3.6. *Die Lösung von (1)(2) ist*

$$x(t) = X(t,\tau)\xi + \int_\tau^t X(t,s)b(s)ds$$

$x(\tau) = \xi$, *weil* $X(\tau,\tau) = I$

$$\frac{d}{dt}\int_\tau^t X(t,s)b(s)ds = \underbrace{X(t,t)}_{I} b(t) + \int_\tau^t \underbrace{\partial_t X(t,s)}_{A(t)X(t,s)} b(s)ds$$
$$= b(t) + A(t)\int_\tau^t X(t,s)b(s)ds$$

Methode der Variation der Konstanten
Sei $y_1, ..., y_n$ beliebiges FS von Lösungen der Homogenen Gleichung (3).
Ansatz für Lösungen x von (1) (2): $x(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)y_i(t)$:

$$x' = \sum_{j=1}^n (c_j' y_j + \underbrace{c_j y_j'}_{A(t)y_j}) = \sum_{j=1}^n (c_j' y_j + c_j A(t) y_j) = A(t)x + \sum_{j=1}^n c_j' y_j$$

Algorithmus

1. Bestimme ein FS von Lösungen $y_1, ..., y_n$ von (3)
2. Ansatz $x = \sum_{i=1}^n c_i(t)y_i(t)$ in (1)
3. Linear unabhängige algebraische Systeme (4) für $c_1', ..., c_n'$
4. Löse (4)
5. $c_j' \Rightarrow c_j$ (Integrationskonstanten)
6. bestimme Integrationskonstanten aus (2)

Vorlesung am 03.06.2009

3.4.1 Systeme

Beispiel (Erzwungene Schwingungen, Resonanz, Mittelung)

$$x' = Ax + b(t) \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi \tag{2}$$

$A \in \mathbb{M}(n \times n)$ konstant, $b(t) = \underbrace{\sum_{l=-m}^{m} b_l e^{il\omega t}}_{b(t+\frac{2\pi}{\omega}=b(t)}$ periodisch, $b_{-l} = \overline{b}_l$

Seien $spec(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ (paarweise verschiedene Eigenwerte) und v_1, ..., v_n Eigenvektoren zu λ_1, ..., λ_n.

$$\begin{aligned}
x &= X(t,\tau)\xi + \int_\tau^t X(t,s) \sum_{l=-m}^{m} b_l e^{il\omega s} ds \\
&= \underbrace{X(t,\tau)\sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j}_{\sum_{j=1}^{m} \xi_j e^{\lambda_j(t-\tau)} v_j} + \int_\tau^t X(t,s) \sum_{l=-m}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{l,j} v_j e^{il\omega s} ds \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_j e^{\lambda_j(t-\tau)} v_j + \sum_{l=-m}^{m} \underbrace{b_{l,j} e^{\lambda_j t} \underbrace{\int_\tau^t e^{(il\omega - \lambda_j)s} ds}_{\frac{1}{il\omega-\lambda_j}\left(e^{(il\omega-\lambda_j)t} - e^{(il\omega-\lambda_j)\tau}\right)}}_{\frac{b_{l,j}}{il\omega-\lambda_j}\left(e^{il\omega t} - e^{(il\omega-\lambda_j)\tau+\lambda_j t}\right)} v_j
\end{aligned}$$

Bemerkung

1. Resonanz zwischen der externen Frequenz und einer internen Frequenz:
   $\exists j \in \{1, ..., n\}, l \in \{-m, ..., m\} : il\omega = \lambda_j$
   $\Rightarrow \sup_{t\geq 0} |x(t)| = \infty$
2. $\forall j \in \{1, ..., n\}, l \in \{-m, ..., m\} : il\omega \neq \lambda_j$
   $$x = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j(t-\tau)} \left(\xi_j - \sum_{l=-m}^{m} \frac{b_{l,j}}{il\omega - \lambda_j}\right) v_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=-m}^{m} \frac{b_{j,l}}{il\omega - \lambda_j} e^{i\omega t} v_j$$
   (a) $\lambda_j = i\omega_j$, $\omega_j > 0$ für $j = 1, .., n$
   $\Rightarrow x$ ist Summe von $\frac{2\pi}{\omega_j}$-periodische Funktionen (quasilineare Funktionen mit Frequenzen ω_1, ..., ω_n) und einer $\frac{2\pi}{m}$-periodischen Funktion (aufgezwungene Frequenz).
   $n = 2 \Rightarrow \omega_1 = -\omega_2$
   Für $\frac{\omega_1}{\omega} \in \mathbb{Q}$ ist x periodisch.
   Für $\frac{\omega_1}{\omega} \notin \mathbb{Q}$ ist x nicht periodisch.
   (b) $Re\lambda_j < 0$
   $$\lim_{t\to\infty} x(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=-m}^{m} \frac{b_{l,j}}{il\omega - \lambda_j} \frac{b_{l,j}}{il\omega - \lambda_j} e^{il\omega t} v_j}_{\frac{2\pi}{\omega}-\text{periodisch: erzwungene Schwingung}}$$

KAPITEL 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND SYSTEME

(c)

$$x_0(t) := \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j(t-\tau)} \left(\xi_j + \frac{b_{0,j}}{\lambda_j}\right) v_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{0,j}}{\lambda_j} v_j$$

ist Lösung von (1)(2) mit

$$b(t) = \sum_{j=1}^{n} b_{0,j} v_j = const : \lim_{\omega\to\infty} \|x(t) - x_0(t)\| = 0$$

(Mittelungseffekt).

3.4.2 Gleichungen höherer Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_0(t)x = b(t) \tag{1}$$

$$x(\tau) = \xi_0, ..., x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \tag{2}$$

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_0(t)x = 0 \tag{3}$$

Satz 3.7. *Sei $y_0, ..., y_n$ FS von Lösungen von (3). Dann ist*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} y_i(t) \int_\tau^t \frac{W(y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n)(s)}{W(y_1, ..., y_n)(s)} b(s) ds$$

eine Lösung von (1). Dabei ist $W(...)$ die entsprechende Wronski-Determinante.

Beweis:
Ansatz:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) y_i(t) \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j' y_j^{(k)} = 0, k = 0, ..., n-2 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
(4)(5) : x' &= \sum_{j=1}^{n} (c_j' y_j + c_j y_j') = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j' \\
x'' &= \sum_{j=1}^{n} (c_j' y_j' + c_j y_j'') = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j'' \\
&\vdots \\
x^{(n-1)} &= \sum_{j=1}^{n} c_j' y_j^{(n-2)} + c_j y_j^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n-1)} \\
x^{(n)} &= \sum_{j=1}^{n} \left(c_j' y_j^{(n-1)} c_j y^{(n)}\right)
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem bezeichnen wir als (6) und erhalten mit (4) und (1)

$$\sum_{j=1}^{n}\left(c_j' y_j^{(n-1)} + c_j y_j^{(n)}\right) + a_{n-1}\sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n-2)} + ... + a_1 \sum_{j=1}^{n} c_j y_j' + a_0 \sum_{j=1}^{n} c_j y_j = b.$$

Mit (2) erhalten wir

$$\Rightarrow \qquad y_j^{(n)} + a_{n-1} y_j^{(n-1)} + ... + a_0 y_j = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} c_j' y_j^{(n-1)} = b \tag{7}$$

$\Rightarrow$ (4) und (7) liefern also inhomogene lineare algebraische Gleichungssysteme für c_1', ..., c_n' (für fixiertes t).
Cramer'sche Regel:

$$\begin{aligned} c_j'(t) &= \frac{1}{W(y_1,...,y_n)(t)} \det \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_{j-1}(t) & 0 & y_{j+1}(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{j-1}^{(n-2)}(t) & 0 & y_{j+1}^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_{j-1}^{(n-1)}(t) & b(t) & y_{j+1}^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W(y_1,...,y_n)(t)} (-1)^{n+j} b(t) W(y_1,...,y_{j-1},y_{j+1},...,y_n)(t) \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel
$n = 2$

eine partikuläre Lösung von (1)

$$x(t) = -y_1(t)\int_\tau^t \frac{W(y_1)}{\det\begin{pmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{pmatrix}} b(s)ds + y_2(t)\int_\tau^t \frac{W(y_2)}{\det\begin{pmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{pmatrix}} b(s)ds$$

allgemeine Lösung von (1)

$$x(t) = y_1(t)\left(c_1 - \int_\tau^t \frac{y_2(s)b(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)} ds\right) + y_2(t)\left(c_2 + \int_\tau^t \frac{y_1(s)b(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)} ds\right)$$

Vorlesung am 08.06.2009

Beispiel (Freier Fall mit Reibung)

$$\begin{aligned} x'' + ax' &= b \\ x(0) &= \xi_0 \\ x'(0) &= \xi_1 \end{aligned}$$

$a > 0$: Reibungskoeffizient

$b = -g < 0$ Gravitationskoeffizient

FS der homogenen Gleichung:
$\lambda^2 + a\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -a$
$y_1(t) = 1$, $y_2(t) = e^{-at}$

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1 + c_2 e^{-at} - \int_0^t \frac{e^{-as} b}{\det \begin{pmatrix} 1 & e^{-as} \\ 0 & -ae^{-as} \end{pmatrix}} + e^{-at} \int_0^t \frac{b}{-ae^{-as}} ds \\
&= c_1 + c_2 e^{-at} + b \left(- \int_0^t (-a)^{-1} ds + e^{-at} \int_0^t (-a)^{-1} e^{as} ds \right) \\
&= c_1 + c_2 e^{-at} + \frac{b}{a} t - \frac{b}{a^2} \left(e^{at} - 1 \right) e^{-at} \\
&= c_1 - \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a} t + e^{-at} \left(c_2 + \frac{b}{a^2} \right) \\
x'(t) &= \frac{b}{a} - ae^{-at} \left(c_2 + \frac{b}{a^2} \right) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Bestimmung von c_1 und c_2:

$$\begin{aligned}
c_1 - \frac{b}{a^2} + c_2 + \frac{b}{a^2} &= \xi_0 \\
\frac{b}{a} - a \left(c_2 + \frac{b}{a^2} \right) &= \xi_1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow c_1 = \xi_0 + \frac{\xi_1}{a}$, $c_2 = -\frac{\xi_1}{a}$

Kapitel 4

Stabilität stationärer Lösungen

$$x' = f(x) \tag{1}$$
$$x(0) = \xi \tag{2}$$

$f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi, x_0 \in U$, $x = \hat{x}(t, \xi)$ maximale Lösung von (1)(2), $t \in]t_-(\xi; t_+(\xi)[$, $f(x_0) = 0$

Definition (Stabilität)

- x_0 heißt *stabil* (*Ljapunov-stabil*), wenn gilt:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \xi \in U, \|\xi - x_0\| < \delta : t_+(\xi) = \infty, \forall \geq 0 : \|\hat{x}(t, \xi) - x_0\| < \varepsilon \tag{3}$$
- x_0 heißt *asymptotisch stabil*, wenn x_0 stabil ist und
$$\forall \xi \in U, \|\xi - x_0\| < \delta : \lim_{t\to\infty} \hat{x}(t, \xi) = x_0$$
- x_0 heißt *instabil*, wenn x_0 nicht stabil ist.

Gleichungen höherer Ordnung

$$x^{(n)} + f(x, x', ..., x^{(n-1)}) = 0 \tag{1}$$
$$x^{(k)}(0) = \xi_k, k = 0, ..., n-1 \tag{2}$$

$f : U \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(\xi_0, ..., \xi_{n-1}), (x_0, 0, ..., 0) \in U$, $f(x_0, 0, ..., 0) = 0$, $\hat{x}(t, \xi)$ maximale Lösung von (1)(2), $t \in]t_-(\xi), t_+(\xi)[$

Definition

- x_0 heißt *stabil*, wenn gilt:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \xi \in U, |\xi_0 - x_0| + |\xi_1| + ... + |\xi_{n-1}| < \delta :$$
$$t_+(\xi) = \infty, |\hat{x}(t, \xi) - x_0| + |\delta_t \hat{x}(t, \xi)| + ... + |\delta_t^{n-1} \hat{x}(t, \xi)| < \varepsilon \tag{3}$$
- x_0 heißt *asymptotisch stabil*, wenn x_0 stabil ist und
$$\lim_{t\to\infty} \big(|\hat{x}(t, \xi) - x_0| + |\delta_t \hat{x}(t, \xi)| + ... + |\delta_t^{n-1} \hat{x}(t, \xi)|\big) = 0$$
gilt.

Bemerkung (Andere Schreibweise von (3))

$$(3) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \xi \in U, t \in [0, t_+(\xi)[: \|\hat{x}(t,\xi) - x_0\| < \varepsilon$$

Bemerkung
Vergleich von (3) mit stetiger Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert ξ:
Sei $t_+(\xi) = \infty$ für alle $\xi \in U$. Dann ist $\hat{x}(t,\cdot)$ stetig:

$$\forall t \geq 0, \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \xi \in U, \|\xi - x_0\| < \delta : \|\hat{x}(t,\xi) - \hat{x}(t,x_0)\| < \varepsilon$$

x_0 ist stabil, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \xi \in U, \|\xi - x_0\| < \delta : \forall t \geq 0 : \|\hat{x}(t,\xi) - \hat{x}(t,x_0)\| < \varepsilon$$

Vorlesung am 10.06.2009

4.1 Linearisierungsprinzip

Satz 4.1. *Seien $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $\alpha = \max\{Re\lambda | \lambda \in spec(f'(x_0))\}$. Dann gilt:*

1. *$\alpha < 0 \Rightarrow x_0$ ist asymptotisch stabil.*
2. *$\alpha > 0 \Rightarrow x_0$ ist instabil.*

Beweis:

1. (a) $\exists c > 0 : \forall \xi \in U, t \geq 0 : \|e^{tf'(x_0)}\xi\| \leq ce^{\frac{\alpha}{2}t}\|\xi\|$
   Sei im Gegenteil: $\forall c > 0 : \exists \xi_c \in \mathbb{R}^n, t_c \geq 0 : \|e^{t_c f'(x_0)}\xi_c\| > ce^{\frac{\alpha}{2}t_c}\|\xi_c\|$.
   O.B.d.A.: $\|\xi_c\| = 1$
   $\Rightarrow \|e^{t_c f'(x_0)}\xi_c\|e^{-\frac{\alpha}{2}t_c} \stackrel{c\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$$e^{-\frac{\alpha}{2}t_c} \underbrace{e^{t_c f'(x_0)}\xi_c}_{\text{Entwicklung nach dem FS}} = \sum_{j=1}^{m} e^{\left(\lambda_j - \frac{\alpha}{2}\right)t_c} \sum_{k=1}^{g_j}\sum_{l=1}^{b_{j,k}} \underbrace{\xi_c^{j,k,l}}_{\text{zeitunabhängig}} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t_c^r}{r!} v_{j,k,l-r}$$

$$e^{\left(\lambda_j - \frac{\alpha}{2}\right)t_c} = e^{\left(Re\lambda_j - \frac{\alpha}{2}\right)t}\left(\cos Im\lambda_j t + i \sin Im\lambda_j t\right)$$

$$Re\lambda_j - \frac{\alpha}{2} < 0 \ \forall j = 1, ..., m$$

   $\Rightarrow$ Widerspruch

   (b)

$$\partial_t\left(\hat{x}(t, \xi - x\right) = f(\hat{x}(t,\xi)) = \underbrace{f(x_0)}_{=0} + f'(x_0)\left(\hat{x}(t,\xi) - x_0\right) + \underbrace{R\left(\hat{x}(t,\xi) - x_0\right)}_{\lim_{\|y\|\to 0} \frac{R(y)}{\|y\|} \to 0}$$

   Formel der Variation der Konstanten:

$$\hat{x}(t,\xi) - x_0 = e^{f'(x_0)t}(\xi - x_0) + \int_0^t e^{f'(x_0)(t-s)} R(\hat{x}(s,\xi) - x_0) ds$$

$$\|\hat{x}(t,\xi) - x_0\| \leq ce^{\frac{\alpha}{2}t}\|\xi - x_0\| + c\int_0^t e^{\frac{\alpha}{2}(t-s)}\|R(\hat{x}(s,\xi) - x_0)\| ds, \text{ für } t \in [0, t_+(\xi)[$$

(c)

$$\exists \gamma > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\| < \gamma : x \in U, \|R(x - x_0)\| < -\frac{\alpha}{4c}\|x - x_0\|$$

$$\forall \xi \in U, t \in [0, t_+(\xi)[\text{ mit } \forall s \in [0, t] : \|\hat{x}(s, \xi) - x_0\| < \gamma :$$

$$e^{-\frac{\alpha}{2}t}\|\hat{x}(t, \xi) - x_0\| \leq c\|\xi - x_0\| - \frac{\alpha}{4}\int_0^t \|\hat{x}(s, \xi) - x_0\|e^{-\frac{\alpha}{2}s}ds$$

Gronwall-Lemma: $\forall \xi \in U, t \in [0, t_+(\xi)[$ mit $\forall s \in [0, t] : \|\hat{x}(s, \xi) - x_0\| < \gamma$:

$$e^{-\frac{\alpha}{2}t}\|\hat{x}(t, \xi)\| \leq c\|\xi - x_0\|e^{-\frac{\alpha}{4}t}$$
$$\|\hat{x}(t, \xi) - x_0\| \leq c\|\xi - x_0\|e^{\frac{\alpha}{4}t}$$

- 1. Fall:
  $$\exists \delta : \forall \xi \in U, \|\xi - x_0\| < \delta : \forall t \in [0, t_+(\xi)[: \|\hat{x}8t, \xi) - x_0\| < \gamma$$
  $\Rightarrow t_+(\xi) = \infty$
  $$\forall t > 0 : \|\hat{x}(t, \xi) - x_0\| \leq c\|\xi - x_0\|e^{\frac{\alpha}{4}t}$$
  (*exponentielle Stabilität*)
- 2. Fall:
  $$\forall \delta > 0 : \exists \xi_\delta \in U : \|\xi_\delta - x_0\| < \delta$$
  und für ein $t = t_\delta \in [0, t_+(\xi_\delta)[$ gilt $\|\hat{x}(t, \xi) - x_0\| > \gamma$.
  Sei
  $$\tau_\delta = \inf\left\{t \in [0, t_+(\xi_\delta)[\middle|\|\hat{x}(t, \xi_\delta) - x_0\| \geq \gamma\right\}$$
  der erste Zeitpunkt, wo die Lösung $x(t, \xi_\delta)$ die γ-Kugel um x_0 verlässt. Für alle $t \in [0, \tau_\delta]$ gilt also $\|\hat{x}(t, \xi_\delta) - x_0\| < \gamma$.
  $\Rightarrow \|\hat{x}(\tau_\delta, \xi_\delta) - x_0\| \leq \gamma$, $\|\hat{x}(\tau_\delta, \xi_\delta) - x_0\| \geq \gamma$
  $\Rightarrow \|\hat{x}(\tau_\delta, \xi_\delta) - x_0\| = \gamma$
  $\xi = \xi_\delta$, $t = \tau_\delta$ sind in der Ungleichung vor dem Gronwall-Lemma zugelassen:
  $$\forall t \in [0, \tau_\delta] : \gamma \leq c\underbrace{\|\xi - x_0\|}_{\leq\delta}\underbrace{e^{\frac{\alpha}{2}t}}_{\leq 1}$$
  $\Rightarrow \gamma \leq c\delta$
  Dies kann nicht für alle δ gelten, d.h. wir erhalten einen Widerspruch.

2. (fehlt)

4.2 Hurwith-Kriterien

Problem
Gegeben ist ein (reelles) Polynom $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.
Gesucht sind Kriterien an die Koeffizienten $a_1, ..., a_n$, die hinreichend für einen der beiden folgenden Fälle sind:

- $Re\lambda_i < 0$ für alle $i = 1, ..., n$
- $\exists i \in \{1, ..., n\} : Re\lambda_i > 0$

Definition (Hurwitz-Matrizen)

$$H_k := \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & a_{2k-5} & \vdots & a_k \end{pmatrix}$$

mit $a_j = 0$ für $j > n$.

Satz 4.2.

1. *Sei* $a_n > 0$, $a_{n-2} > 0$, ..., $\det H_1 > 0$, $\det H_3 > 0$, ..., *dann sind die Realteile aller Nullstellen von* P *negativ.*

2. *Sei* $a_n > 0$, $a_{n-2} > 0$, ..., $\det H_2 > 0$, $\det H_4 > 0$, ..., *dann sind die Realteile aller Nullstellen von* P *negativ.*

3. *Wenn* $a_j < 0$ *für ein* $j \in \{1, ..., n\}$ *oder* $\det H_k < 0$ *für ein* $k \in \{1, ..., n\}$, *dann ist der Realteil einer Nullstelle von* P *positiv.*

Vorlesung am 15.06.2009

$x_1 := x$, ..., $x_n := x^{(n-1)}$
$\rightsquigarrow x_1' = x_2$, ..., $x_n' = -f(x_1, ..., x_n)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\partial_1 f(x_0, 0, ..., 0) & -\partial_2 f(x_0, 0, ..., 0) & \cdots & \cdots & -\partial_n f(x_0, 0, ..., 0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - (...)) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ \partial_1 f & \partial_2 f & \partial_3 f & \cdots & \partial_{n-1} f & \lambda + \partial_n f \end{pmatrix} \\ &= \lambda^n + \partial_n f \lambda^{n-1} + \partial_{n-1} f \lambda^{n-2} + ... + (-1)^{n+1} \partial_1 f (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

Vorlesung am 29.06.2009

4.3 Liapunov-Funktionen

Beispiele

- Mathematisches Pendel: $x'' + \frac{l}{g} \sin x = 0$, char. Polynom: $\lambda^2 + \frac{l}{g} \cos x_0 = 0$

  Stationäre Lösungen:

  - $x = 0$: $\lambda^2 + \frac{l}{g} = 0 \Rightarrow$?
  - $x = \pi$: $\lambda^2 - \frac{l}{g} = 0 \Rightarrow$ instabil

- Räuber-Beute-Modell: $x' = ax - bxy$, $y' = cxy - dy$, $a, b, c, d > 0$

  Stationäre Lösungen: $x = y = 0$, $x = \frac{d}{c}$, $y = ab$

  Linearisierung: $\begin{pmatrix} a - by_0 & -bx_0 \\ cy_0 & cx_0 - d \end{pmatrix}$

  $\mathrm{tr} = ad + cx_0 - by_0$, $\det = (a - by_0)(cx_0 - d) + bcx_0y_0$

  $x_0 = y_0 = 0$: $\mathrm{tr} = a - d$, $\det = -ad \Rightarrow$ instabil

  $x_0 = \frac{d}{c}$, $y_0 = \frac{a}{b}$: $\mathrm{tr} = a - d + c\frac{d}{c} - b\frac{a}{c} \Rightarrow$?

Definition
Wir betrachten

$$x' = f(x) \tag{1}$$

mit $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in U$ mit $f(x_0) = 0$.
$\hat{x}(t, \xi)$ sei maximale Lösung von (1) mit $\hat{x}(0, \xi) = \xi$, $\xi \in U$, $t_-(\xi) < t < t_+(\xi)$.

- $U_0 \subseteq U$ heißt *positiv invariant* bezüglich (1), wenn $\hat{x}(t, \xi) \in U_0$ für $0 \le t < t_+(\xi)$, $\xi \in U_0$ gilt.
- Seien $U_0 \subseteq U$ positiv invariant bezüglich (1) und $V : U_0 \to \mathbb{R}$.

  Dann gilt:

  – V heißt *Liapunov-Funktion* zu (1) auf U_0, wenn $t \in [0, t_+(\xi)[\to V(\hat{x}(t, \xi))$ monoton fallend für alle $\xi \in U_0$ ist.

  – V heißt *Erstes Integral* zu (1) auf U_0, wenn $V(\hat{x}(t, \xi)) = const$ bezüglich $t \in [0, t_+(\xi)[$ für alle $\xi \in U_0$.

Satz 4.3. (1. Liapunov-Satz (über Stabilität)) *Seien $U_0 \subseteq U$ positiv invariant, V Liapunov-Funktion zu (1) auf U_0 und $x_0 \in U_0$. Dann gilt:*

1. *x_0 ist striktes lokales Minimum von $V \Rightarrow x_0$ ist stabil*
2. *V ist erstes Integral und x_0 ist striktes lokales Minimum von $V \Rightarrow x_0$ ist nicht asymptotisch stabil*

Beweis:

2. Sei im Gegenteil x_0 asymptotisch stabil.

   $\xi \approx x_0$: $V = (\hat{x}(t, \xi)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} V(x_0)$ und $V(\hat{x}(t, \xi)) = V(\hat{x}(0, \xi)) = V(\xi) = V(x_0)$ liefert den Widerspruch, dass V konstant nache x_0 ist.

1. (a) $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$: $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U_0, \inf\{V(x) : \|x - x_0\| = \varepsilon\} > V(x_0)$ Annahme:
   $\forall \varepsilon_0 > 0 : \exists \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[: \inf\{V(x) : \|x - x_0\| = \varepsilon\} \le V(x_0)$
   $\varepsilon_j \to 0$: $\|x_{j,k} - x_0\| = \varepsilon_j$, $V(x_{j,k}) \le V(x_0) + \frac{1}{k}$
   O.B.d.A.: $x_{j,k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_j$: $\|x_j - x_0\| = \varepsilon_j$, $V(x_j) \le V(x_0)$
   Widerspruch zur Voraussetzung, dass x_0 strenges lokales Minimum von v ist.

   (b) Sei x_0 nicht stabil, d.h.
   $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists \xi_\delta \in U : \|\xi_\delta - x_0\| < \delta \wedge \exists t_\delta \in [0, t_+(\xi_\delta)[: \|\hat{x}(t_\delta, \xi_\delta) - x_0\| \ge \varepsilon$
   O.B.d.A. sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U_0$ und $m = \inf\left\{V(x) \middle| \|x - x_0\| = \varepsilon\right\} > V(x_0)$ gilt.
   $\tau_\delta := \inf\left\{t \in [0, t_+(\xi_\delta)[\middle| \|\hat{x}(t, \xi_\delta) - x_0\| \ge \varepsilon\right\}$
   $\delta < \varepsilon \Rightarrow \tau_\delta > 0$
   $\|\hat{x}(\tau_\delta, \xi_\delta) - x_0\| \le \varepsilon$
   $\Rightarrow V(\hat{x}(0, \xi_\delta)) \ge V(\hat{x}(\tau_\delta, \xi_\delta)) \ge m > V(x_0)$
   $V(\hat{x}(0, \xi_\delta)) \overset{\delta\to0}{\longrightarrow} V(x_0)$
   $\Rightarrow$ Widerspruch. □

Satz 4.4. (Kriterien für Liapunov-Funktion bzw. erstes Integral) *Sei V stetig diff'bar. Dann gilt:*

1. *V ist Liapunov-Funktion auf U_0 bzgl. (1) $\Leftrightarrow \forall x \in U_0 : \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$*
2. *V ist erstes Integral auf U_0 bzgl. (1) $\Leftrightarrow \forall x \in U_0 : \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0$*

Beweis:

$$\frac{d}{dt} V(x) = V'(x)x' = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$$

$\nabla V(x) := (\partial x_1 V(x), ..., \partial x_n V(x)) \in \mathbb{R}^n$ □

Vorlesung am 01.07.2009

Beispielklassen

1. Gradientensysteme
$$x' = -\nabla V(x) \tag{1}$$
$V \in C^2(U)$
$\nabla V(x_0) = 0$
V ist Liapunov-Funktion zu (1) auf U:
$\frac{d}{dt} V(x) = V'(x)x' = \langle \nabla V(x), -\nabla V(x) \rangle = -\|\nabla V(x)\|^2 \leq 0$

2. Mechanische Systeme mit Reibung
$$m_j x_j'' = -\nabla_{x_j} P(x_1, ..., x_n) - \alpha_j(x_1, ..., x_n, x_1', ..., x_n') x_j', j = 1, ..., n \tag{1}$$
$P \in C^2(U)$, $U \in \mathbb{R}^{3n}$ offen, $\alpha \in C^1(U \times \mathbb{R}^{3n})$, $\alpha \geq 0$, $m_j > 0$
$\nabla_{x_j} P(x_{1,0}, ..., x_{n,0}) = 0$, j= $1, ..., n$
$V(x_1, ..., x_n, x_1', ..., x_n') = \sum_{j=1}^n m_j \frac{\|x_j'\|^2}{2} + P(x_1, ..., x_n)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\langle x_j', x_j' \rangle}{2} + P(x_1, ..., x_n)\right) &= \sum_{j=1}^n m_j \langle x_j'', x_j' \rangle + \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{x_j} P(x_1, ..., x_n), x_j' \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \langle x_j', \underbrace{m_j x_j'' + \nabla_{x_j} P(x_1, ..., x_n)}_{-\alpha_j(x_1, ..., x_n, x_1', ..., x_n') x_j'} \rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= -\sum_{j=1}^n \alpha_j(x_1, ..., x_n, x_1', ..., x_n') \|x_j'\|^2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Satz 4.5. (2. Liapunov-Satz (asymptotische Stabilität)) *Sei $V \in C^1(U_0)$, x_0 striktes lokales Minimum von V.*

$$\forall x \in U_0 \setminus \{x_0\} \text{ nahe } x_0 : \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0 \tag{2}$$

$\Rightarrow x_0$ ist stabil.

Beweis:
Sei $\varepsilon_0 > 0$ mit $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subseteq U_0 : V(x) > V(x_0)$ für alle $x \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus \{x_0\}$.
x_0 ist stabil $\Leftrightarrow \exists \delta_0 > 0 : \forall \xi \in U : \|\xi - x_0\| \leq \delta_0 \Rightarrow \forall t \geq 0 : \|\hat{x}(t,\xi) - x_0\| < \varepsilon_0$
Zu zeigen ist $\|\xi - \delta_0\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \hat{x}(t,\xi) = x_0$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 : \exists t_0 \geq 0 : \forall t \geq t_0 : \|\hat{x}(t,\xi) - x_0\| < \varepsilon$.
Sei $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ gegeben.
x_0 ist stabil $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall \xi \in U : \|\xi - x_0\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 : \|\hat{x}(t,\xi) - x_0\| < \delta$.
Sei $\xi \in U$ mit $\|\xi - x_0\| < \delta_0$ beliebig fixiert.

1. $\|\xi - x_0\| < \delta \Rightarrow$ fertig.

2. $\delta \leq \|\xi - x_0\| < \delta_0$
   $M := \max\{\langle \nabla V(x), f(x)\rangle : \delta \leq \|x - x_0\|\delta_0\} < 0$
   $\frac{d}{dt} V(\hat{x}(t,\xi)) = \langle \nabla V(\hat{x}(t,\xi)), f(\hat{x}(t,\xi))\rangle \leq M$ für alle $t \geq 0$ mit $\|\hat{x}(t,s) - x_0\| \geq \delta$ für alle $s \in [0,t]$.
   $V(\hat{x}(t,\xi)) - V(\xi) \leq Mt$ für alle $t \geq 0$ mit $\|\hat{x}(t,s) - x_0\| \geq \delta$ für alle $s \in [0,t]$.
   $\Rightarrow \forall t \geq 0 : V(\hat{x}(t,\xi)) > V(x_0)$
   $\Rightarrow V(x_0) < V(\hat{x}(t,\xi)) \leq V(\xi) + Mt$ für alle $t \geq 0$ mit $\|\hat{x}(s,\xi) - x_0\| \geq \delta$
   $\Rightarrow \exists T > 0$ mit $\|\hat{x}(T,\xi) - x_0\| < \delta$
   $\rightsquigarrow$ Fall 1. □

Definition
$\{\xi \in U | \lim_{t\to t_+(\xi)} \hat{x}(t,\xi) = x_0\}$ heißt *Einzugsbereich* von x_0

Bemerkung
Wenn ist x_0 asymptotisch stabil ist, existiert $B_\varepsilon(x_0)$ als Teilmenge des Einzugsbereichs.

Satz 4.6. (3. Liapunov-Satz (Einzugsbereich)) *Seien $V \in C^1(U_0)$ Liapunov-Funktion zu (1) auf U_0, $c > V(x_0)$ und $M_c := \{x \in U_0 | V(x) \leq c\}$ abgeschlossen und beschränkt.*

$$\forall x \in M_c \setminus \{x_0\} \text{ nahe } \mathrm{x}_0 : \langle \nabla V(x), f(x)\rangle < 0 \tag{3}$$

$\Rightarrow$ *M_c ist Teilmenge des Einzugsbereichs von x_0.*

Bemerkung
(3) kann abgeschwächt werden zu $V(\hat{x}(\cdot,\xi))$ ist nicht konstant für alle $\xi \in M_c \setminus \{x_0\}$.

Beispiel (Gradientensystem auf $\mathbb{R}^n$)
$x' = -\nabla V(x)$, $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweifach stetig diff'bar, $\nabla V(x_j) = 0$
Es gilt

$$\langle \nabla V(x), f(x)\rangle = -\|\nabla V(x)\|^2 < 0$$

genau dann, wenn $\nabla V(x) \neq 0$.
$\lim_{\|x\|\to\infty} = \infty$
$\Rightarrow M_c$ ist abgeschlossen (weil V stetig ist) und M_c ist beschränkt, denn sonst gälte $V(x_n) \leq c$ und $\|x_n\| \to \infty$.
$\Rightarrow$ Der Einzugsbereich von x_0 ist $\mathbb{R}^n$.

Vorlesung am 06.07.2009

Satz 4.7. (3) *$c > V(x_0)$, $M_c := \{x \in U_0 | V(x) \leq c\}$ beschränkt.*
$\forall \xi \in M_c \setminus \{x_0\} : V(\hat{x}(\cdot,\xi))$ ist nicht konstant auf einer Nullumgebung. *(4)*
(Die bisherigen Forderungen bedeuten, dass M_c eine Teilmenge des Einzugsbereichs ist.)
(4) $\Leftrightarrow \forall x \in M_c \setminus \{x_0\} : \langle \nabla V(x), f(x)\rangle < 0$, falls V stetig diff'bar *($\tilde{4}$)*

Beweis:
Gegenteil: $\exists \xi \in M_c : \lim_{t\to t_+(\xi)} \hat{x}(t,\xi)$ existiert nicht oder ist ungleich x_0.
$\exists \xi \in M_c, \delta > 0, t_1 < t_2 < ..., t_j \to t_+(\xi)$: $\|\hat{x}(t_j,\xi) - x_0\| \geq \delta$
$V(\hat{x}(t_j,\xi)) \leq V(\underbrace{\hat{x}(0,\xi)}\xi) = V(\xi) \leq c$
$\Rightarrow \hat{x}(t_j,\xi) \in M_c$
Bolzano-Weierstraß: $\hat{x}(t_j,\xi) \to \tilde{x} \in M_c$
$\tilde{x} \neq x_0 : \|\hat{x}(t_j,\xi) - x_0\| \geq \delta$
$\lim_{t\nearrow t_+(\xi)} V(\hat{x}(t,\xi)) = \inf_{0\leq t<t_+(\xi)} V(\hat{x}(t,\xi))$

$$
\begin{array}{rcl}
s \geq 0: \; V(\hat{x}(s,\hat{x}(t_j,\xi))) & = & V(\hat{x}(s+t_j,\xi)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
V(\hat{x}(s,\hat{x})) & = & \inf\limits_{t\geq 0} V(\hat{x}(t,\xi))
\end{array}
$$

Demnach ist $V(\hat{x}(s,\hat{x}))$ konstant bezüglich s. Dies widerspricht der Voraussetzung (4).

Beispiel (Gradientensysteme)
$x' = -\nabla V(x)$ (1)
$V : U \to \mathbb{R}$ zweifach stetig diff'bar, x_0 strenges lokales Minimum von V.
Aus Satz 1 folgt, dass x_0 stabile stationäre Lösung von (1).
Wenn $\nabla V(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$ nahe x_0 ist, dann ist x_0 nach Satz 2 asymptotisch stabil.
Wenn $c > V(x_0)$ mit beschränktem M_c existiert und $\forall x \in M_c \setminus \{x_0\} : \nabla V(x) \neq 0$ gilt, dann ist M_c nach Satz 3 eine Teilmenge des Einzugsbereichs von x_0.

Satz 4.8. **(4)** *$U = U_0 = \mathbb{R}^n$, $\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) = \infty$, $\forall x \neq x_0 : \nabla V(x) \neq 0$*
$\Rightarrow$ Der Einzugsbereich von x_0 ist $\mathbb{R}^n$.

(ohne Beweis)

Vorlesung am 08.07.2009

Bemerkung
Sei V hinreichend glatt. Dann gilt:

- (2) $\Leftarrow \nabla V(x_0) = 0$, $H_V(x_0)$ positiv definit
- (3) $\Leftarrow \forall \xi \neq x_0$ nahe x_0: $\langle \nabla V(\xi), f(x)\rangle < 0$ $(\tilde{3})$
- (4) $\Leftarrow \forall \xi \in M_c \setminus \{x_0\}$: $\langle \nabla V(\xi), f(x)\rangle < 0$ $(\tilde{4})$

Beweis:

- $(\tilde{3}) \Rightarrow (3)$

  Gegenteil: $\exists \xi \approx x_0$: $V(\hat{x}(\cdot,\xi)) = \mathit{const}$ auf einer Nullumgebung
  $\frac{d}{dt} V(\hat{x}(t,\xi)) = \langle \nabla V(\hat{x}(t,\xi), \underbrace{\partial_t \hat{x}(t,\xi)}_{f(\hat{x}(t,\xi))}\rangle = 0,$
  $t = 0 \Rightarrow \langle \nabla V(\xi), f(\xi)\rangle = 0$
- $(\tilde{4}) \Rightarrow (4)$

  Analog.

Beispiel
$n = 1$, $U = \mathbb{R}$, $U_0 =]0, \infty[$, $f(x) = -x(x-1)^2 = -x^3 + 2x^2 - x$ und $V(x) = \frac{x^4}{3} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$
$\Rightarrow x_0 = 1$, wegen $0 \notin U_0$ (Nullstellen von f)
$V'(1) = -f(1) = 0$
$V''(1) = -f'(1) = 0$
$V'''(1) = -f''(1) = 2$
$M_c = \{x \in]0, \infty[| V(x) \leq c\}$
Einzugsbereich von $x_0 = 1$: $[1, \infty[$
M_c ist jedoch keine Teilmenge des Einzugsbereichs. (Weil M_c nicht abgeschlossen ist!)

Beispiel
$x'' = -\sin x = P'(x)$
$n = 1$, $m_1 = 1$, $\alpha_1 = 0$
$P(x) = -\cos x$
$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x + 2$
$N_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | V(x, y) = c\}$
$N_0 = \{(2k\pi, 0) | k \in \mathbb{Z}\}$
$0 < c < 2$: N_c abzählbare viele geschlossene Kurven

Definition (Heterokline Lösung)
Eine *heterokline Lösung* ist eine Lösung, die aus einer stabilen Lösung in eine andere stabile Lösung läuft.

Vorlesung am 13.07.2009

Kapitel 5

Der Satz von Liouville und der Poincaré-Wiederkehrsatz

$$x' = f(t,x) \tag{1}$$
$$x(\tau) = \xi \tag{2}$$

$f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz bezüglich x, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen
$\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in U$
$\hat{x}(t,\tau,\xi) \in U$ maximale Lösung von (1)(2), $t_-(\tau,\xi) < t < t_+(\tau,\xi)$

Lemma 5.1. *Sei $\Omega \subseteq U$ beschränkt und $\overline{\Omega} \subseteq U$. Dann gilt*

$$\sup\{t_+(\tau,\xi) | \xi \in \Omega\} < \tau < \inf\{t_+(\tau,\xi) | \xi \in \Omega\}.$$

Beweis:
Annahme: $\sup\{t_-(\tau,\xi)|\xi\} = \tau$, $\exists \xi_1, \xi_2, \ldots \in \Omega : t_-(\tau,\xi_i) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \tau$
O.B.d.A. $\xi_j \to \xi \in \overline{\Omega} \subseteq U$
Picard-Lindelöf:

$$\underbrace{\tau - t_-(\tau,\xi_j)}_{\overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0} \geq \min\left\{ a, \frac{b}{\max_{\substack{|t-\tau|\leq a \\ \|x-\xi_j\|\leq b}} \|f(t,x)\|} \mid |a \in \mathbb{R}, \overline{B_b(\xi_j)} \subseteq U \right\}$$

Die obere Schranke folgt analog. $\square$

Satz 5.1. (Liouville) *Sei $\Omega \subseteq U$ beschränkt und (Lebesgue-messbar), $\overline{\Omega} \subseteq U$*
$\Omega_{t,\tau} := \{\hat{x}(t,\tau,\xi) | \xi \in \Omega\}$ *für* $\sup\{t_-(\tau,\xi)|\xi \in \Omega\} < t < \inf\{t_+(\tau,\xi)|\xi \in \Omega\}$
Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} vol(\Omega_{t,\tau})|_{t=\tau} = \int_\Omega div\,_x f(\tau,x) dx.$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\partial_t vol(\Omega_{t,\tau}) &= \partial_t \int_{\Omega_{t,\tau}} dx \overset{x=\hat{x}(t,\tau,\xi)}{=} \partial_t \int_\Omega |\det \partial_\xi \hat{x}(t,\tau,\xi)| d\xi \\
&= \int_\Omega \partial_t \det\left(\partial_{\xi_1}\hat{x}(t,\tau,\xi)\ldots\partial_{\xi_n}\hat{x}(t,\tau,\xi)\right) d\xi \\
&= \sum_{j=1}^n \int_\Omega \det\left(\partial_{\xi_1}\hat{x}(t,\tau,\xi)\ldots \underbrace{\partial_t\partial_{x_j}\hat{x}(t,\tau,\xi)}_{\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \xi_j}} \ldots\partial_t\hat{x}(t,\tau,\xi)\right) d\xi \\
\partial_t vol(\Omega_{t,\tau})|_{t=\tau} &= \sum_{j=1}^n \int_\Omega \det \underbrace{\left(e_1,...,e_{j-1},\frac{\partial f}{\partial x_j}(\tau,\xi),e_{j+1},...,e_n\right)}_{\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_j}(\tau,\xi) & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_j}(\tau,\xi) & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_j}(\tau,\xi) & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial \xi_j}(\tau,\xi) & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial \xi_j}(\tau,\xi) & \cdots & 1
\end{pmatrix}} d\xi \\
&= \int_\Omega \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \xi_j}(\tau,\xi)}_{\text{div }_x f(\tau,\xi)} d\xi
\end{aligned}
$$

5.1 Wiederkehrsatz von Poincaré

$x' = f(x)$ (1)
$x(0) = \xi$ (2)
$f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in U$
$\hat{x}(t,\xi)$ maximale Lösung von (1)(2), $t_-(\xi) < t < t_+(\xi)$

Satz 5.2. *Sei div $f(x) = 0$ für alle $x \in U$.*
$U_0 \subseteq U$ beschränkt und positiv invariant.
$t_+(\xi) = \infty$ für $\xi \in U_0$.
Für alle messbaren beschränkten $\Omega \subseteq U_0$ mit $vol(\Omega) > 0$ gilt:

$$\forall T > 0 : \exists \xi \in \Omega, n \in \mathbb{N} : \hat{x}(nT,\xi) \in \Omega.$$

Beweis:
Annahme: $\exists \Omega \subseteq U_0$ messbar, beschränkt, $vol\Omega > 0$, $T > 0$: $\forall \xi \in \Omega, n \in \mathbb{N} : \hat{x}(nT,\xi) \notin \Omega$.
$\varphi : U_0 \to U_0$, $\varphi(x) = \hat{x}(T,x)$, $\varphi(\varphi(x)) = \varphi^2(x) = \hat{x}(2T,x)$, ...
$\forall \xi \in \Omega, n \in \mathbb{N} : \varphi^n(\xi) \notin \Omega$ (3)
$\bigcup_{j=1}^n \varphi^i(\Omega) \subseteq U_0$
$\Rightarrow \infty > vol(U_0) \geq vol \bigcup_{j=1}^\infty \varphi^i(\Omega) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^\infty \underbrace{vol\varphi^i(\Omega)}_{vol\Omega} = \infty$

$(*)$: $\varphi^i(\Omega)$ sind disjunkt

$\Rightarrow$ Reicht aus, $\varphi^i(\Omega) \cup \varphi^k(\Omega) \neq \emptyset$ für gewisse $j \neq k$ zum Widerspruch zu führen.
z.B. $j < k : \varphi^i(x) = \varphi^k(y)$ mit $x, y \in \Omega$, $x = \varphi^{k-j}(y) \in \Omega \Rightarrow$ Widerspruch zu (3) $\square$

Bemerkung (Verschärfung des Satzes)
$\exists \Omega_0 \subseteq \Omega$ (Nullmenge): $\forall \xi \in \Omega \setminus \Omega_0 : \exists n \in \mathbb{N} : \hat{x}(nT, \xi) \in \Omega$

Beispiel (Hamilton-Systeme)
$q_j' = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$
$p_j' = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$
$\rightsquigarrow$ System 2. Gleichungen
$H : U \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$

Lemma 5.2. *1. H ist erstes Integral*

2. div $(\frac{\partial H}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, ..., -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0$

Beweis:
div $(...) = \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + ... + \frac{\partial}{\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} - ... - \frac{\partial}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0$ $\square$

Vorlesung am 15.07.2009

Kapitel 6

Zusammenfassung

Kapitel (laut VL)	**Begriffe**	**Sätze**	**Formeln, Algorithmen, Beispiele**
1.	linear, (in)homogen, autonom		
2.	max. Lösung	Satz von Peano, Satz von Picard-Lindelöf, Eindeutigkeitssatz, Gronwall'sches Lemma, Satz über blow-up	$x' = f(t,x), x(\tau) = \xi$ $x^{(n)} = f(t,x,x',...,x^{(n-1)})$, $x(\tau) = \xi_0, x'(\tau) = \xi_1, ..., x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1}$ $x' = \sqrt{\lvert x \rvert}$ $x' = x^2$
3.	Gleichungen mit getrennten Variablen, exakte Gleichungen, Koordinatentransformation		$x' = f(x)g(t),\ x(\tau) = \xi$ $\Rightarrow \int_\xi^x \frac{dy}{f(y)} = \int_\tau^t g(s)ds$ $x' = -\frac{\partial_t U(t,x)}{\partial_x U(t,x)},\ x(\tau) = \xi$ $\Rightarrow U(t,x) = U(\tau,\xi)$ $x'' = f(t,x') : x' = y$ $x'' = f(x,x') : x' = P(x)$ $x'' = f(x), x(\tau) = \xi_0, x'(\tau) = \xi_1 :$ $\frac{x'^2}{2} - \int_{\xi_0}^x f(y)dy = \frac{\xi_1^2}{2}$ $x' = f(x,y), y' = g(x,y) \Rightarrow y = \varphi(x)$
4.			$x' = f(x), x(0) = \xi :$ $\hat{x}(t+s,\xi) = \hat{x}(t,\hat{x}(s,s))$
5.	Fundamentalsystem, allgemeine Lösung, partikuläre Lösung, Wronski-Determinante	Kriterium für lin. Unabh. von Lösungen hom. Gl. oder Systeme, FS für lin. autonome hom. Systeme, FS für lin. aut. hom. Sys. höherer Ordnung	$x' = A(t)x + b(t), x(\tau) = \xi$ $\Rightarrow x(t) = X(t,\tau)\xi + \int_\tau^t X(t,s)b(s)ds$ $x^{(n)} + a_{n-1}tx^{(n-1)} + ... + a_0(t)x = b(t)$ $x_{part}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} y_j(t)$ $+ \int_\tau^t \frac{W(y_1,...,y_{j-1},y_{j+1},...,y_n)}{W(y_1,...,y_n}b(s)ds$
6.	Stabilität, as. Stabilität für Systeme bzw. Gl. höherer Ordnung, Liapunov-Funktionen	Linearisierungsprinzip, Hurwitz-Kriterien, Sätze von Liapunov, Satz von Liouville, Poincare-Wiederkehrsatz	$x' = -\nabla V(x)$ $m_j x_j'' = -\nabla x_j P(x_1,...,x_n) - \alpha_j x_j'$ $a_j' = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q,p)$, $p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q,p)$

Index