

Seminar Analyse von Petrinetzen: Unfoldings II

Yves Radunz

14. Januar 2009

Was bisher geschah:

Inhalt von Unfoldings I:

- ① *Warum* entfalten wir Netze?
 - Vermeidung der Erzeugung des Erreichbarkeitsgraphen
 - Möglichst wenig Informationsverlust
- ② *Wie* entfalten wir Netze?
 - Vorgehen bei der Entfaltung
 - Endlichkeit

Und nun die Fortsetzung...

Was machen wir mit der Entfaltung?

- ① Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
- ② Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
- ③ Erfüllbarkeitstests dieser Formeln
 - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
 - Zerlegung in Formeln in Normalform
 - Reduktion auf maximale Konfigurationen der endlichen Entfaltung

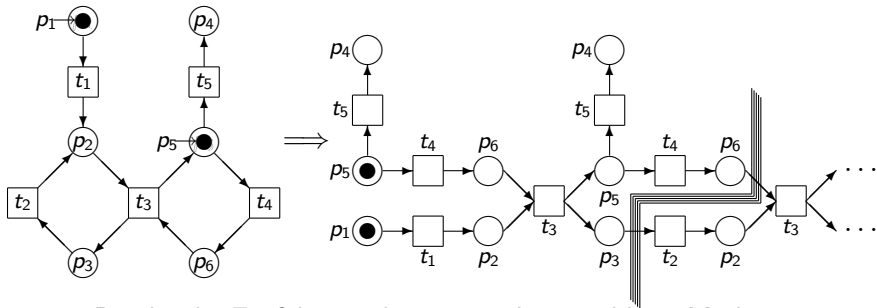
Und nun die Fortsetzung...

Was machen wir mit der Entfaltung?

- ① Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
- ② Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
- ③ Erfüllbarkeitstests dieser Formeln
 - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
 - Zerlegung in Formeln in Normalform
 - Reduktion auf maximale Konfigurationen der endlichen Entfaltung

Erinnerung: Entfaltung von Netzen

- 1 Füge, von den Plätzen mit der Startmarkierung ausgehend, Transitionen hinzu. Füge ggf. Kopien von Plätzen ein, damit die Entfaltung konfliktfrei bleibt.



- 2 Breche die Entfaltung ab, wenn jede erreichbare Markierung eine Repäsentation (*Konfiguration*) in dem entfalteten Netz hat.

Aufbau der Formeln unserer Logik

Definition: Formel

Sei $N = (P, T, F, m_0)$ ein 1-beschränktes Netz.

Dann ist φ eine **Formel** über N , wenn sie durch endlich viele Anwendungen der folgenden Regeln erhalten wird:

- ① $\varphi = \mathbf{true}$
- ② $\varphi = p, p \in P$
- ③ $\varphi = \neg\psi, \psi$ Formel über N
- ④ $\varphi = \psi \wedge \chi, \psi, \chi$ Formeln über N
- ⑤ $\varphi = \Diamond\psi, \psi$ Formel über N

Abkürzung: $\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi$

Erfüllbarkeit

Definition: Erfüllbarkeitsrelation \models

Seien $N = (P, T, F, m_0)$ ein 1-beschränktes Netz,
 $N^* = (P^*, T^*, F^*, m_0^*, L^*)$ die zugehörige (vollständige, d.h. ggf. unendliche) Entfaltung (mit $L^* : (P^* \rightarrow P) \cup (T^* \rightarrow T)$ als Labels) und K eine Konfiguration von N^* .

- 1 $K \models \mathbf{true}$
- 2 $K \models p \Leftrightarrow p \in L^*(Cut(K))$
 $Cut(K)$ = die durch K markierten Plätze in N^* .
- 3 $K \models \neg\varphi \Leftrightarrow K \not\models \varphi$
- 4 $K \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow K \models \varphi \text{ und } K \models \psi$
- 5 $K \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow \exists K' \supseteq K : K' \models \varphi$ (K' Konfiguration von N^*)

$$N \models \varphi \Leftrightarrow \emptyset \models \varphi$$

- ① Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
- ② Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
- ③ Erfüllbarkeitstests dieser Formeln
 - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
 - Zerlegung in Formeln in Normalform
 - Reduktion auf maximale Konfigurationen der endlichen Entfaltung

Transformation von Fragen in Formeln

Seien N ein Netz und K eine Konfiguration in N^* .

- Erzeugt K die Markierung $\{p_2, p_5\}$?
 \implies Gilt $K \models p_2 \wedge p_5 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_6$?
- Ist die Anfangsmarkierung $\{p_1, p_2\}$?
 \implies Gilt $\emptyset \models p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5 \wedge \neg p_6$?
- Ist eine Markierung erreichbar, die p_1 markiert?
 \implies Gilt $N \models \Diamond p_1$?
- Ist die Transition t_2 lebendig?
 \implies Gilt $N \models \Box \Diamond p_3$?

- ① Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
- ② Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
- ③ **Erfüllbarkeitstests dieser Formeln**
 - **Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung**
 - Zerlegung in Formeln in Normalform
 - Reduktion auf maximale Konfigurationen der endlichen Entfaltung

Einfache Fälle beim Erfüllbarkeitstest:

- ① $\varphi = \mathbf{true}$ $(K \models \varphi \text{ ist immer erfüllt})$
- ② $\varphi = p$ $(K \models \varphi \text{ gdw. } p \in L^*(Cut(K)))$
- ③ $\varphi = \neg\psi$ $(K \models \varphi \text{ gdw. } K \neg \models \psi)$
- ④ $\varphi = \psi \wedge \chi$ $(K \models \varphi \text{ gdw. } K \models \psi \text{ und } K \models \chi)$

Problematischer:

- ⑤ $\varphi = \Diamond\psi$
Gibt es in der (potentiell unendlichen) Entfaltung N^*
irgendwo eine Konfiguration $K' \supseteq K$, welche $K' \models \psi$ erfüllt?

Ziel

Entscheidung der Erfüllbarkeit von $N \models \Diamond\varphi$ nur mit dem endlichen Anfang N^+ der Entfaltung N^* .

Definition: $Sat^*(\varphi), Sat^+(\varphi)$

Seien φ eine Formel über einem Netz N , N^* die vollständige Entfaltung von N und $\mathcal{K}(M)$ die Menge aller Konfigurationen von $M \in \{N^+, N^*\}$.

Dann ist $Sat^*(\varphi) = \{K \in \mathcal{K}(N^*) \mid K \models \varphi\}$ und
 $Sat^+(\varphi) = Sat^*(\varphi) \cap \mathcal{K}(N^+)$.

Es gilt $N \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow Sat^*(\varphi) \neq \emptyset$.

Satz

Seien N ein 1-beschränktes Netz und φ eine Formel über N .

- ① $Sat^*(\varphi) = \emptyset$ gilt genau dann, wenn $Sat^+(\varphi) = \emptyset$.
- ② $N \models \Diamond\varphi$ gilt genau dann, wenn $Sat^+(\varphi) \neq \emptyset$.

Beweisidee

- ① Hinrichtung: klar, wegen $Sat^*(\varphi) \supseteq Sat^+(\varphi)$.
 Reanimation (Rückrichtung): Beweis durch Kontraposition
 $Sat^*(\varphi) \neq \emptyset \Rightarrow \exists K \in Sat^*(\varphi) \Rightarrow \exists K \in \mathcal{K}(N^*) : K \models \varphi$
 $\Rightarrow \exists K' \in \mathcal{K}(\varphi) : L^*(Cut(K')) = L^*(Cut(K))$
 (K' entsteht durch *Verschiebung* von K .)
 Es gilt dann $K' \models \varphi$, also $K' \in Sat^+(\varphi)$, d.h. $Sat^+(\varphi) \neq \emptyset$.
- ② $N \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow Sat^*(\varphi) \neq \emptyset \Leftrightarrow Sat^+(\varphi) \neq \emptyset$ □

- ① Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
- ② Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
- ③ **Erfüllbarkeitstests dieser Formeln**
 - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
 - **Zerlegung in Formeln in Normalform**
 - Reduktion auf maximale Elemente von $\mathcal{K}(N^+)$

Definition: Klausel, Normalform

Sei φ eine Formel über einem Netz $N = (P, T, F, m_0)$.

φ ist eine **Klausel**, wenn:

- $\varphi = \mathbf{true}$ oder $\varphi = \mathbf{false} = \neg \mathbf{true}$
- $\varphi = p$ oder $\varphi = \neg p$, $p \in P$
- $\varphi = \psi \wedge \chi$, ψ, χ Klauseln

φ ist in **Normalform**, wenn:

- φ ist eine Klausel
- $\varphi = \psi \wedge \Diamond \chi$ oder $\varphi = \psi \wedge \neg \Diamond \chi$, ψ, χ in Normalform

Lemma: Normalformzerlegung

Sei φ eine Formel über einem 1-beschränkten Netz N .

Dann gibt es (explizit berechenbare!) Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ über N
mit $Sat^*(\varphi) = Sat^*(\bigvee_{k=1}^n \varphi_k)$. (Kein Beweis.)

\Rightarrow Zurückführung des Problems $Sat^+(\varphi) \stackrel{?}{=} \emptyset$ auf Formeln in Normalform.

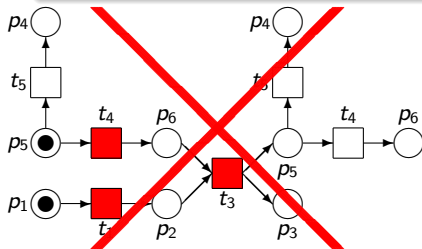
Achtung!

Zerlegung von φ kann exponentielle Größe in Abhängigkeit von der Größe von φ haben.

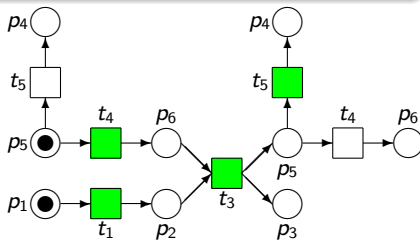
- ① Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
- ② Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
- ③ **Erfüllbarkeitstests dieser Formeln**
 - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
 - Zerlegung in Formeln in Normalform
 - **Reduktion auf maximale Elemente von $\mathcal{K}(N^+)$**

Definition $Max(\mathcal{K})$

Sei N ein Netz mit der Entfaltung N^* und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(N^*)$.
 Für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(N^*)$ schreiben wir $K_1 \leq K_2$, wenn $K_1 \subseteq K_2$.
 Dann ist $Max(\mathcal{K}) = \{K \in \mathcal{K} \mid \forall K' \in \mathcal{K} : K' \not\leq K\}$ die Menge der maximalen (bzgl. der Halbordnung \leq) Konfigurationen aus \mathcal{K} .



$\notin Max(\mathcal{K}(N^+))$



$\in Max(\mathcal{K}(N^+))$

Definition $Sat^+(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2)$

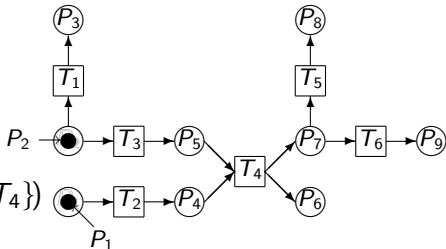
Seien φ eine Formel über N und $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}(N^+)$.

Für $K \in \mathcal{K}(N^+)$ schreiben wir $K \leq \mathcal{K}_1$, wenn ein $K' \in \mathcal{K}_1$ mit $K \leq K'$ existiert. Analog für \mathcal{K}_2 .

Wir definieren nun

$$Sat^+(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2) = \{K \in Sat^+(\varphi) \mid K \not\leq \mathcal{K}_1, K \leq \mathcal{K}_2\}.$$

- $Sat^+(\emptyset, \text{true}, \{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$
- $Sat^+(\{\emptyset\}, \text{true}, \{\emptyset\}) = \emptyset$
- $Sat^+(\{\emptyset\}, \text{true}, \mathcal{K}(N^+)) = \mathcal{K}(N^+) \setminus \{\emptyset\}$
- $Sat^+(\{\{T_2\}\}, \neg P_6, \{T_2, T_3, T_4\}) = \{\{T_3\}, \{T_2, T_3\}\}$
- $Sat^+(\{\{T_1\}\}, \text{true}, \{\{T_3\}\}) = \{\{T_3\}\}$



Definition: *Last*

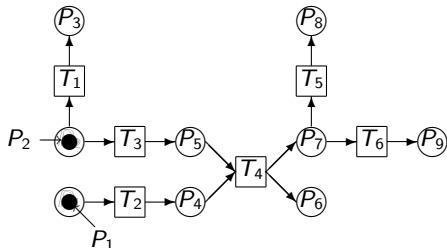
Seien φ eine Formel über N und $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}(N^+)$ Mengen von Konfigurationen.

Dann definieren wir $Last(\varphi) = Max(Sat^+(\varphi))$ bzw.

$$Last(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2) = Max(Sat^+(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2)).$$

$$Last(\neg P_6)$$

$$= \{\{T_2, T_3\}, \{T_2, T_1\}\}$$



Satz 2

Sei φ eine Formel über einem 1-beschränkten Netz N .

Dann gilt:

- 1 $Sat^+(\varphi) = \emptyset \Leftrightarrow Last(\varphi) = \emptyset$
- 2 $N \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow Last(\varphi) \neq \emptyset$

Beweis:

- 1 Hinrichtung: klar, wegen $Sat^+(\varphi) \supseteq Last(\varphi)$

Rückrichtung (per Kontraposition):

$$Sat^+(\varphi) \neq \emptyset \Rightarrow \exists K_0 \in \mathcal{K}(N^+) : K_0 \models \varphi$$

- K_0 in $Sat^+(\varphi)$ maximal $\Rightarrow K_0 \in Last(\varphi) \Rightarrow Last(\varphi) \neq \emptyset$
- K_0 nicht maximal $\Rightarrow \exists Sat^+(\varphi) \ni K_1 \supset K_0 : K_1 \models \varphi$

Fortsetzung führt auf $(K_i) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$

N^+ ist endlich, also auch $\mathcal{K}(N^+) \supseteq Sat^+(\varphi)$.

$\Rightarrow (K_i) = K_0 \subset \dots \subset K_n$ ist endlich.

$\Rightarrow K_n$ maximal in $Sat^+(\varphi) \Rightarrow K_n \in Last(\varphi) \Rightarrow Last(\varphi) \neq \emptyset$

- 2 $N \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow Sat^+(\varphi) \neq \emptyset \Leftrightarrow Last(\varphi) \neq \emptyset$



Satz 3: Berechnung von $Last(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2)$

Seien φ, ψ Formeln über einem 1-beschränkten Netz N und $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathcal{K}(N^+)$.

Für $\mathcal{K}', \mathcal{K}'' \in \mathcal{K}(N^+)$ sei $K' \nabla K'' = \{K_1 \cap K_2 \mid K_1 \in \mathcal{K}', K_2 \in \mathcal{K}''\}$.

Weiterhin sei $\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{K}(N^+) \mid \exists K' \in \mathcal{K}(N^*) : L^*(K') = L^*(K),$
 $K' \text{ wird durch Verschieben von}$
 $K'' \in Last(\psi) \text{ erzeugt}\}$.

Dann gilt $Last(\varphi) = Last(\emptyset, \varphi, \mathcal{K}(N^+))$ und

- ① $Last(\mathcal{K}_1, \varphi \wedge \Diamond\psi, \mathcal{K}_2) = Last(\mathcal{K}_1, \varphi, Max(\mathcal{K}_2 \nabla \mathcal{K}))$
- ② $Last(\mathcal{K}_1, \varphi \wedge \neg\Diamond\psi, \mathcal{K}_2) = Last(Max(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}), \varphi, \mathcal{K}_2)$

(Kein Beweis.)

Fertig ... und nun?

Unser aktueller Stand

- ① Übersetzung von Fragen nach Eigenschaften des Netzes in Formeln φ über N
 - Auswertung von φ einfach, außer bei $\varphi = \Diamond\psi$
- ② $N \models \Diamond\psi \Leftrightarrow Last(\varphi) \neq \emptyset$ (Satz 2)
- ③ Zerlegung in Teilformeln in Normalform (Lemma zur Normalformzerlegung)
- ④ Rekursionsgleichung zur Berechnung von $Last(\varphi)$, wenn φ in Normalform ist (Satz 3)

Zusätzliche Bemerkungen

Am Ende des zweiten Vortrags kam die Frage auf, ob es für zwei Markierungen m und m' möglich ist, eine Formel zu finden, welche aussagt, dass aus der (erreichbaren) Markierung m die Markierung m' erreichbar ist.

Seien φ_m und $\varphi_{m'}$ die Formeln mit der Eigenschaft

$K \models \varphi_m \Leftrightarrow L^*(Cut(K)) = m$ (bzw. m'), d.h. die Formeln, die m bzw. m' beschreiben.

Dann ist $\varphi = \Diamond(\varphi_m \wedge \Diamond\varphi_{m'})$ die gesuchte Formel, denn:

$$N \models \varphi \Leftrightarrow \exists \emptyset \subseteq K \in \mathcal{K}(N^*) : K \models \varphi_m \wedge \Diamond\varphi_{m'}$$

$\Leftrightarrow \exists \emptyset \subseteq K \subseteq K' \in \mathcal{K}(N^*) : K' \models \varphi_{m'}$ und $K \models \varphi_m$, d.h. m ist durch K erreichbar und es gibt eine Menge von Transitionen $K' \setminus K$, sodass aus m auch m' erreichbar ist.

Wenn nicht sichergestellt werden soll, dass m auch erreichbar ist, dann können wir die Formel $\psi = \Diamond\varphi_m \rightarrow \varphi$ verwenden. Diese ist erfüllt, wenn m nicht erreichbar ist, oder φ gilt.