

# Analysis III für Physikstudiengänge

Ein Kompendium zur Vorlesung im Wintersemester 2016/17 von L. Recke

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>3</b>
2.1	Die maximale Lösung . . . . .	4
2.1.1	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	5
2.1.2	Abhängigkeit von den Daten . . . . .	6
2.1.3	Blow-up und Urknall . . . . .	8
2.2	Einige Tricks des analytischen Lösens . . . . .	10
2.2.1	Gleichungen mit getrennten Variablen . . . . .	10
2.2.2	Exakte Gleichungen und integrierende Faktoren . . . . .	12
2.2.3	Koordinatentransformationen . . . . .	13
2.2.4	Einige Typen von Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	15
2.2.5	Autonome Systeme zweiter Ordnung . . . . .	17
2.3	Lineare Systeme und Gleichungen . . . . .	17
2.3.1	Algebraische Eigenschaften der Lösungsmenge und der Lösungsabbildung	18
2.3.2	Lineare homogene autonome Systeme . . . . .	19
2.3.3	Lineare homogene autonome Gleichungen . . . . .	22
2.3.4	Lineare inhomogene Systeme und Gleichungen. Variation der Konstanten	23
2.4	Stabilität stationärer Lösungen . . . . .	25
2.4.1	Stabilitätskriterien anhand des Spektrums der Linearisierung. Prinzip der linearisierten Stabilität . . . . .	26
2.4.2	Liapunov-Funktionen und erste Integrale . . . . .	30
2.4.3	Stabilitätskriterien anhand von Liapunov-Funktionen und ersten Integralen	32
2.5	Langzeitverhalten volumenerhaltender Systeme . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Rand- und Eigenwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>36</b>
3.1	Anwendungsgebiete . . . . .	36

3.1.1	Variationsrechnung . . . . .	36
3.1.2	Radialsymmetrische Lösungen von partiellen Differentialgleichungen . . .	37
3.2	Randwertprobleme für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	38
3.3	Eigenwertwertprobleme für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . .	41
<b>4</b>	<b>Elemente der Funktionalanalysis</b>	<b>47</b>
4.1	Normierte Vektorräume . . . . .	47
4.2	Der wesentliche Unterschied: Endlichdimensional oder Unendlichdimensional? .	49
4.3	Normierte Funktionenräume . . . . .	50
4.4	Vektorräume mit Skalarprodukt. Hilbert-Räume . . . . .	53
4.5	Orthonormalbasen . . . . .	54
4.6	Lineare beschränkte Operatoren . . . . .	55
4.7	Dualraum. Verallgemeinerte Funktionen und verallgemeinerte Ableitungen . . .	57
4.8	Vervollständigung . . . . .	63
4.9	Spektrum linearer beschränkter Operatoren . . . . .	65
4.10	Spektrum linearer kompakter Operatoren . . . . .	68
4.11	Spektrum linearer beschränkter selbstadjungierter Operatoren . . . . .	68
4.12	Spektrum linearer kompakter selbstadjungierter Operatoren . . . . .	69

## 1 Vorwort

Die Unbekannte in einer Differentialgleichung ist weder eine Zahl noch ein Tupel von Zahlen, sondern eine Funktion. Diese Funktion wird oft in einem unendlich-dimensionalen Vektorraum von Funktionen gesucht, insofern ist eine Differentialgleichung eine Gleichung mit einer unendlich-dimensionalen Unbekannten. Im Vergleich zu Gleichungen für Zahlen oder für Tupel von Zahlen sind die Vielfalt des Lösungsverhaltens und der Aufwand des analytischen und/oder numerischen Lösens von Differentialgleichungen erheblich größer, und der wesentliche Grund dafür ist die Unendlich-Dimensionalität der Unbekannten.

In diesem Semester behandeln wir Anfangswertprobleme, Randwertprobleme und Eigenwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen sowie Teile der Theorie unendlich-dimensionaler Vektorräume (der sogenannten Funktionalanalysis), die zur Behandlung von Rand- und Eigenwertproblemen für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen entwickelt wurden.

Die Kapitel 1 und 2 behandeln beide gewöhnliche Differentialgleichungen, trotzdem sind die Fragestellungen und die Resultate, die in Kap. 1 präsentiert werden, völlig verschieden von denen in Kap. 2. Das ist auch nicht verwunderlich, denn die Resultate von Kap. 1 entstanden unter dem Einfluß von Anwendungen aus der Dynamik, während die Resultate aus Kap. 2 angewendet werden zur Beschreibung zeitunabhängiger Zustände von Objekten, die von einer Ortsvaria-

blen abhängen. Entsprechend verschieden sind auch die Bezeichnungen, die traditionell benutzt werden: In Kap. 1 wird die unabhängige Variable (in Anwendungen eine Zeitvariable) mit  $t$  bezeichnet und die abhängige Variable mit  $x$  oder  $y$ . In Kap. 2 wird die unabhängige Variable (in Anwendungen eine Ortsvariable) mit  $x$  bezeichnet und die abhängige Variable mit  $u$  oder  $v$ . In Kap. 1 sind die Definitionsbereiche der Lösungen zunächst unbekannt und müssen bei der Berechnung der Lösung mit berechnet werden, während in Kap. 2 die Definitionsbereiche der Lösungen gegeben und fixiert sind. Anfangswertprobleme und Randwertprobleme unterscheiden sich auch grundlegend in der Frage nach Existenz und Eindeutigkeit der Lösung: Anfangswertprobleme besitzen unter Bedingungen, die in fast allen Anwendungen gegeben sind, genau eine (sogenannte maximale) Lösung. Dagegen können Randwertprobleme genau eine Lösung besitzen oder auch keine Lösung oder auch viele verschiedene Lösungen, und diese unterschiedlichen Fälle des Lösungsverhaltens treten auch in Anwendungen auf.

In Kap. 1 behandeln wir lineare und nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung sowie Systeme solcher Gleichungen, in Kap. 2 dagegen nur lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die Kap. 1 und 2 unterscheiden sich auch stark in ihrem Verhältnis zu Kap. 3: Die Resultate von Kap. 1 können präsentiert werden ohne die Sprache der Funktionalanalysis zu benutzen. Nur für den Beweis der Existenz der Lösung des Anfangswertproblems benötigt man typische Funktionalanalysis, nämlich den Banachschen Fixpunktsatz und die Vollständigkeit der normierten Vektorräume  $C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ . In Kap. 2 erweist sich allerdings die Sprache der Funktionalanalysis durchgehend als außerordentlich nützlich. Ohne diese Sprache könnten die weitgehenden Analogien zur linearen Algebra nicht sichtbar werden.

## 2 Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen

**Bezeichnungen** Folgende allgemein übliche Bezeichnungen werden benutzt:  $\|\cdot\|$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sind die Euklidische Norm und das Euklidische Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$ , und  $\mathbb{M}_n$  ist die Menge aller reellen  $n \times n$ -Matrizen.

**Systeme und Gleichungen und ihre Ordnung** In diesem Kapitel sind  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge (der sogenannte **Phasenraum**) und  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  bzw.  $g : J \times X \rightarrow \mathbb{R}$  Abbildungen, und wir betrachten

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (2.1)$$

ein sogenanntes System (gewöhnlicher Differentialgleichungen)  $n$ -ter Ordnung (in Normalform), sowie

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad (2.2)$$

eine sogenannte (skalare gewöhnlicher Differential-) Gleichung  $n$ -ter Ordnung (in Normalform). Hier ist der Begriff "Ordnung" so eingeführt, dass er die Anzahl der (skalaren) Anfangsbedingungen, die benötigt werden, um ein wohlgestelltes Problem zu bekommen, angibt. Damit ist die Ordnung die "Anzahl der Freiheitsgrade", d.h. ein Maß dafür, wie kompliziert die Dynamik, die durch (2.1) oder (2.2) beschrieben wird, sein kann. Bisweilen wird das System (2.1) auch System der Dimension  $n$  von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung genannt oder auch System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Funktionen  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  bzw.  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißen **Lösung** von (2.1) bzw. (2.2), wenn  $I \subseteq J$  ein Intervall ist, wenn  $x$  differenzierbar bzw. wenn  $y$   $n$ -fach differenzierbar ist und wenn (2.1) bzw. (2.2) für alle  $t \in I$  erfüllt ist, d.h. wenn insbesondere für alle  $t \in I$  gilt  $x(t) \in X$  bzw.  $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in X$ .

**Qualitative Theorie** So oft wie möglich werden wir den Standpunkt der sogenannten qualitativen Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen einnehmen, d.h. Fragen an die Lösungen von (2.1) bzw. (2.2) zu beantworten ohne diese Lösungen explizit auszurechnen, d.h. möglichst direkt von den Daten von (2.1) bzw. (2.2) auf die Antworten zu schließen ohne den "Umweg" über die Lösungen.

**Anfangswertproblem** Das Anfangswertproblem zu dem System (2.1) bzw. zu der Gleichung (2.2) besteht darin, zu gegebenen  $\tau \in J$  und  $\xi \in X$  bzw.  $(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \in X$  eine Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  bzw.  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  von (2.1) bzw. (2.2) mit

$$x(\tau) = \xi \tag{2.3}$$

bzw.

$$y(\tau) = \eta_0, y'(\tau) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\tau) = \eta_{n-1}, \tag{2.4}$$

also insbesondere mit  $\tau \in I$ , zu finden.

**Transformation von (2.2), (2.4) in (2.1), (2.3)** Es sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (2.2), (2.4), und  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei definiert durch

$$x_1(t) := y(t), x_2(t) := y'(t), \dots, x_n(t) := y^{(n-1)}(t). \tag{2.5}$$

Dann ist  $x$  eine Lösung von (2.1), (2.3) mit  $f_1(t, x) = x_2, f_2(t, x) = x_3, \dots, f_{n-1}(t, x) = x_n$  und  $f_n(t, x) = g(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $\xi_1 = \eta_0, \xi_2 = \eta_1, \dots, \xi_n = \eta_{n-1}$ . Mit anderen Worten: Jedes Anfangswertproblem vom Typ (2.2), (2.4) kann mit Hilfe der Transformation (2.5) in ein Anfangswertproblem vom Typ (2.1), (2.3) transformiert werden, in diesem Sinne ist (2.2), (2.4) ein Spezialfall von (2.1), (2.3). Deshalb werden wir uns bei der Betrachtung fast aller theoretischer Fragen auf die Behandlung von Anfangswertproblemen vom Typ (2.1), (2.3) beschränken. Die Übersetzung der Resultate für (2.1), (2.3) in entsprechende Resultate für (2.2), (2.4) mit Hilfe von (2.5) ist dann einfach. Nur bei der Betrachtung einiger spezieller Fragen, bei denen die spezielle Struktur von (2.2), (2.4) benutzt werden muß, werden wir (2.2), (2.4) betrachten.

Bisweilen werden wir auch Differentialgleichungen behandeln, die weder die Normalform (2.1) noch die Normalform (2.2) besitzen, z.B. sogenannte **Euler-Lagrange-Gleichungen** der Form

$$\frac{d}{dt} \nabla_{x'} L(t, x(t), x'(t)) = \nabla_x L(t, x(t), x'(t)). \tag{2.6}$$

Dabei sind  $L : J \times X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die sogenannte Lagrange-Funktion, und  $\nabla_x L$  bzw.  $\nabla_{x'} L$  sind die Gradienten von  $L$  bzgl. der Variablen  $x$  bzw.  $x'$ . Das System (2.6) kann in die Normalform (2.1) transformiert werden, wenn für alle  $t \in J, x \in X$  und  $x' \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\det H_{L, x'}(t, x, x') \neq 0$ . Dabei ist  $H_{L, x'}$  die Hesse-Matrix von  $L$  bzgl. der Variablen  $x'$ .

## 2.1 Die maximale Lösung

Eine Lösung  $x : I \rightarrow X$  von (2.1), (2.3) heißt **maximal**, wenn für jede andere Lösung  $\tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow X$  von (2.1), (2.3) gilt  $\tilde{I} \subseteq I$  und  $\tilde{x}(t) = x(t)$  für alle  $t \in \tilde{I}$ .

### 2.1.1 Existenz und Eindeutigkeit

**Hauptsatz** Wenn  $f$  stetig ist und wenn die partielle Ableitung  $\partial_x f$  existiert und ebenfalls stetig ist, so existiert für jedes  $\tau \in J$  und jedes  $\xi \in X$  genau eine maximale Lösung von (2.1), (2.3). Das Definitionsintervall der maximalen Lösung ist offen.

Beweise des obigen Hauptsatzes sind sehr aufwendig. Sie beruhen auf Anwendungen der Banachschen Fixpunktsatzes sowie des folgenden Lemmas, das einen sehr einfachen Sachverhalt formuliert, das aber bei Betrachtungen von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen oft eine große Rolle spielt:

**Lemma von Gronwall** Es seien Konstanten  $T > \tau$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  sowie eine stetige Funktion  $z : [\tau, T] \rightarrow [0, \infty)$  gegeben so dass gilt

$$z(t) \leq z(\tau) + \alpha \int_{\tau}^t z(s) ds \text{ für alle } t \in [\tau, T].$$

Dann folgt

$$z(t) \leq z(\tau)e^{\alpha(t-\tau)} \text{ für alle } t \in [\tau, T].$$

**Gegenbeispiel** Wir betrachten (2.1), (2.3) mit  $n = 1, J = X = \mathbb{R}, \tau = \xi = 0$  und  $f(t, x) = \sqrt{|x|}$  (d.h.  $f$  ist stetig, aber nicht differenzierbar), also die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, x(0) = 0.$$

Dann existieren unendlich viele verschiedene maximale Lösungen: Zum Beispiel ist für jedes  $c \geq 0$

$$x(t) = \begin{cases} (t-c)^2/4 & \text{für } t \geq c, \\ 0 & \text{für } t < c \end{cases}$$

eine maximale Lösung.

**Soll man Selbstverständliches beweisen?** Aus der Sicht der klassischen Mechanik scheint es selbstverständlich zu sein, dass die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung in alle Vergangenheit und alle Zukunft eindeutig bestimmt ist, wenn die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit vorgegeben sind. Für partielle Differentialgleichungen ist die Sache überhaupt nicht mehr selbstverständlich: Zum Beispiel für das **Navier-Stokes-System** (ein System partieller Differentialgleichungen, das die Bewegung viskoser Flüssigkeiten beschreibt) ist die Frage, ob die Anfangsbedingung die Lösung bis in alle Zukunft eindeutig bestimmt, derzeit (Februar 2017) eine Eine-Million-Dollar-Aufgabe!

Im weiteren setzen wir stets voraus, dass  $f$  stetig ist und dass die partielle Ableitung  $\partial_x f$  existiert und ebenfalls stetig ist. Für  $\tau \in J$  und  $\xi \in X$  bezeichnen wir mit  $(t_-(\tau, \xi), t_+(\tau, \xi))$  das offene Definitionsintervall der maximalen Lösung von (2.1), (2.3) und mit

$$x(t) = \hat{x}(t, \tau, \xi) \text{ für } t_-(\tau, \xi) < t < t_+(\tau, \xi)$$

die maximale Lösung von (2.1), (2.3).

## 2.1.2 Abhängigkeit von den Daten

**Stetige bzw. glatte Abhängigkeit von den Anfangsdaten** Die Menge

$$D := \{(t, \tau, \xi) \in J \times J \times X : t_-(\tau, \xi) < t < t_+(\tau, \xi)\}$$

ist offen, und die Abbildung  $\hat{x} : D \rightarrow X$  ist stetig. Wenn  $f$   $k$ -fach stetig differenzierbar ist, so ist auch  $\hat{x}$   $k$ -fach stetig differenzierbar. Die partiellen Ableitungen  $\partial_\tau \hat{x}$  und  $\partial_\xi \hat{x}$  sind dann Lösungen der linearen Anfangswertprobleme

$$\partial_t \partial_\tau \hat{x}(t, \tau, \xi) = \partial_x f(t, \hat{x}(t, \tau, \xi)) \partial_\tau \hat{x}(t, \tau, \xi), \quad \partial_\tau \hat{x}(\tau, \tau, \xi) = -f(\tau, \xi),$$

und

$$\partial_t \partial_\xi \hat{x}(t, \tau, \xi) = \partial_x f(t, \hat{x}(t, \tau, \xi)) \partial_\xi \hat{x}(t, \tau, \xi), \quad \partial_\xi \hat{x}(\tau, \tau, \xi) = I.$$

Hier ist  $I \in \mathbb{M}_n$  die Einheitsmatrix.

**Beispiel** Wir betrachten (2.1), (2.3) mit  $n = 1, J = X = \mathbb{R}$  und  $f(t, x) = |x|^{3/2}$ , also die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = |x(t)|^{3/2}, \quad x(\tau) = \xi.$$

Die Funktion  $f$  ist einmal stetig differenzierbar, aber nicht zweifach differenzierbar. Die maximale Lösung ist

$$\hat{x}(t, \tau, \xi) = \begin{cases} \frac{4\xi}{(2 - (t - \tau)\sqrt{\xi})^2} & \text{für } t < \tau + \frac{2}{\sqrt{\xi}}, & \text{falls } \xi > 0, \\ 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}, & \text{falls } \xi = 0, \\ \frac{4\xi}{(2 + (t - \tau)\sqrt{-\xi})^2} & \text{für } t > \tau - \frac{2}{\sqrt{-\xi}}, & \text{falls } \xi < 0, \end{cases}$$

und  $\hat{x}(t, \tau, \cdot)$  ist ebenfalls einmal stetig differenzierbar, aber nicht zweifach differenzierbar.

**Glatte Abhängigkeit von Parametern** Oft treten in einer Differentialgleichung nicht nur die unabhängige Variable  $t$  und die abhängige Variable  $x(t)$  auf, sondern auch sogenannte Parameter  $\lambda$  (z.B. Materialkonstanten in der Kontinuumsmechanik, stöchiometrische Koeffizienten in der chemischen Reaktionskinetik, sogenannte externe Steuergrößen usw.) auf, die vorgegeben sind, also nicht gemeinsam mit  $x(t)$  berechnet werden müssen. Das entsprechende Anfangswertproblem ist dann von der Form  $x'(t) = f(t, x(t), \lambda)$ ,  $x(\tau) = \xi$ , und seine maximale Lösung  $\hat{x}(t, \tau, \xi, \lambda)$  hängt dann auch von dem Parameter  $\lambda$  ab. Dabei gilt wieder: Wenn  $f$   $k$ -fach stetig differenzierbar ist, so ist auch  $\hat{x}$   $k$ -fach stetig differenzierbar. Die partielle Ableitung  $\partial_\lambda \hat{x}$  ist dann Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$\partial_t \partial_\lambda \hat{x}(t, \tau, \xi, \lambda) = \partial_x f(t, \hat{x}(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda) \partial_\lambda \hat{x}(t, \tau, \xi, \lambda) + \partial_\lambda f(t, \hat{x}(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda), \quad \partial_\lambda \hat{x}(\tau, \tau, \xi, \lambda) = 0.$$

**Prozeß-Eigenschaft** Für alle  $\tau \in J$ ,  $\xi \in X$  und  $s, t \in (t_-(\tau, \xi), t_+(\tau, \xi))$  gilt

$$t_\pm(s, \hat{x}(s, \tau, \xi)) = t_\pm(\tau, \xi), \quad \hat{x}(t, s, \hat{x}(s, \tau, \xi)) = \hat{x}(t, \tau, \xi).$$

Insbesondere gilt  $\hat{x}(t, \tau, \cdot)^{-1} = \hat{x}(\tau, t, \cdot)$ , d.h.  $\hat{x}(t, \tau, \cdot)$  bildet  $X$  bijektiv und stetig differenzierbar auf  $X$  ab, und die inverse Abbildung ist ebenfalls stetig differenzierbar.

**Beispiel** Wir betrachten (2.1), (2.3) mit  $n = 1, J = X = \mathbb{R}$  und  $f(t, x) = tx^2$ , also die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = tx(t)^2, \quad x(\tau) = \xi.$$

Die maximale Lösung ist

$$\hat{x}(t, \tau, \xi) = \begin{cases} \frac{2\xi}{(\tau^2 - t^2)\xi + 2} & \text{für } t^2 < \tau^2 + 2/|\xi|, \quad \text{falls } \xi \neq 0, \\ 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad \text{falls } \xi = 0. \end{cases}$$

In diesem Fall ist also

$$t_-(\tau, \xi) = \begin{cases} -\sqrt{\tau^2 + 2/|\xi|}, & \text{falls } \xi \neq 0, \\ -\infty, & \text{falls } \xi = 0, \end{cases} \quad t_+(\tau, \xi) = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 + 2/|\xi|}, & \text{falls } \xi \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } \xi = 0, \end{cases}$$

und die Prozeß-Eigenschaft ist

$$\hat{x}(t, \tau, \xi) = \frac{2\xi}{(\tau^2 - t^2)\xi + 2} = \frac{2 \frac{2\xi}{(\tau^2 - s^2)\xi + 2}}{(s^2 - t^2) \frac{2\xi}{(\tau^2 - s^2)\xi + 2} + 2} = \hat{x}(t, s, \hat{x}(s, \tau, \xi)).$$

**Autonome Systeme und die Fluß-Eigenschaft** Das System (2.1) heißt **autonom**, wenn gilt  $J = \mathbb{R}$  und  $f(s, x) = f(t, x)$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  und  $x \in X$ . Wir schreiben dann anstelle von (2.1)

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{2.7}$$

und für alle  $\tau, s \in \mathbb{R}, \xi \in X$  und  $t \in (t_-(\tau, \xi), t_+(\tau, \xi))$  gilt

$$t_{\pm}(\tau + s, \xi) = t_{\pm}(\tau, \xi) + s, \quad \hat{x}(t + s, \tau + s, \xi) = \hat{x}(t, \tau, \xi).$$

Insbesondere gilt  $\hat{x}(t, \tau, \xi) = \hat{x}(t - \tau, 0, \xi)$ , d.h. die Abbildung  $\hat{x}$  ist im autonomen Fall durch die einfachere Abbildung  $\hat{x}(t, 0, \xi)$  eindeutig bestimmt. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen schreiben wir im autonomen Fall

$$\hat{x}(t, \xi) := \hat{x}(t, 0, \xi) \quad \text{für } t_-(\xi) := t_-(0, \xi) < t < t_+(\xi) := t_+(\tau, \xi).$$

In diesem Sinne kann man im autonomen Fall ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\tau = 0$  setzen. Die Abbildung  $(t, \xi) \mapsto \hat{x}(t, \xi)$  heißt **Fluß** zum autonomen System (2.7), und sie besitzt die sogenannte Fluß-Eigenschaft

$$\hat{x}(t + s, \xi) = \hat{x}(t, \hat{x}(s, \xi))$$

für alle  $s \in (t_-(\xi), t_+(\xi)), t \in (t_-(\xi) - s, t_+(\xi) - s)$  und  $\xi \in X$ .

**Beispiel** Wir betrachten (2.1), (2.3) mit  $n = 1, J = X = \mathbb{R}$  und  $f(t, x) = x^2$ , also die Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = x(t)^2, \quad x(0) = \xi.$$

Die maximale Lösung ist

$$\hat{x}(t, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{1-t\xi} & \text{für } t < 1/\xi, \quad \text{falls } \xi > 0, \\ 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad \text{falls } \xi = 0, \\ \frac{\xi}{1-t\xi} & \text{für } t > 1/\xi, \quad \text{falls } \xi < 0. \end{cases}$$

Die Fluß-Eigenschaft ist also in diesem Fall

$$\hat{x}(t+s, \xi) = \frac{\xi}{1-(t+s)\xi} = \frac{\frac{\xi}{1-t\xi}}{1+s\frac{\xi}{1-t\xi}} = \hat{x}(t, \hat{x}(s, \xi)).$$

### 2.1.3 Blow-up und Urknall

In Anwendungen beschreibt das Intervall  $J$  das Zeitintervall, in dem das “Bewegungsgesetz” (2.1) gilt, während das Intervall  $(t_-(\tau, \xi), t_+(\tau, \xi))$  das Zeitintervall ist, in dem die Lösung von (2.1), (2.3) existiert. Wenn nun  $(t_-(\tau, \xi), t_+(\tau, \xi))$  echt kleiner als  $J$  ist, so entsteht die Frage: Warum hört die Lösung auf zu existieren, obwohl das Bewegungsgesetz weiter existiert? Erstaunlicherweise gibt es darauf eine allgemeingültige Antwort: Weil sich die Lösung dem “Rand” des Phasenraumes  $X$  annähert!

**Langzeitverhalten von Lösungen mit  $(t_-(\tau, \xi), t_+(\tau, \xi)) \neq J$**  (i) Es sei  $t_+(\tau, \xi) < \sup J$  bzw.  $t_-(\tau, \xi) > \inf J$ , dann gilt: Für jede abgeschlossene beschränkte Menge  $K \subset X$  existiert ein  $t_K \in (\tau, t_+(\tau, \xi))$  bzw.  $t_K \in (t_-(\tau, \xi), \tau)$  mit

$$\hat{x}(t, \tau, \xi) \notin K \text{ für alle } t \in (t_K, t_+(\tau, \xi),) \text{ bzw. } t \in (t_-(\tau, \xi), t_K).$$

Insbesondere gilt im Fall  $X = \mathbb{R}^n$ :

$$\|\hat{x}(t, \tau, \xi)\| \rightarrow \infty \text{ für } t \uparrow t_+(\tau, \xi), \text{ falls } t_+(\tau, \xi) < \sup J \quad (2.8)$$

und

$$\|\hat{x}(t, \tau, \xi)\| \rightarrow \infty \text{ für } t \downarrow t_-(\tau, \xi), \text{ falls } t_-(\tau, \xi) > \inf J. \quad (2.9)$$

In Fall (2.8) spricht man von **Blow-up**, und  $t_+(\tau, \xi)$  heißt **Blow-up-Zeitpunkt**. In Fall (2.9) spricht man von **Urknall**, und  $t_-(\tau, \xi)$  heißt **Urknall-Zeitpunkt**.

(ii) Es sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  die maximale Lösung von (2.2), (2.4) mit  $J = \mathbb{R}, X = \mathbb{R}^n$ . Dann folgt

$$|y(t)| + |y'(t)| + \dots + |y^{(n-1)}(t)| \rightarrow \infty \text{ für } t \uparrow \sup I, \text{ falls } \sup I < \infty \quad (2.10)$$

bzw.

$$|y(t)| + |y'(t)| + \dots + |y^{(n-1)}(t)| \rightarrow \infty \text{ für } t \downarrow \sup I, \text{ falls } \inf I > -\infty.$$

**Eine Abschätzung des Definitionsintervalls der maximalen Lösung** Für alle  $a > 0$  und  $b > 0$  mit  $[\tau - a, \tau + a] \subset J$  und  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi\| \leq b\} \subset X$  gilt

$$[\tau - \epsilon(a, b), \tau + \epsilon(a, b)] \subset (t_-(\tau, \xi), t_+(\tau, \xi))$$

mit

$$\epsilon(a, b) := \min \left\{ a, \frac{b}{\max\{\|f(t, x)\| : |t - \tau| \leq a, \|x - \xi\| \leq b\}} \right\}. \quad (2.11)$$

Insbesondere, für alle Folgen  $\tau_1, \tau_2, \dots \in J$  und  $\xi_1, \xi_2, \dots \in X$  mit  $\tau_k \rightarrow \tau_0 \in J$  und  $\xi_k \rightarrow \xi_0 \in X$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} (t_+(\tau_k, \xi_k) - t_-(\tau_k, \xi_k)) > 0.$$

Mit anderen Worten: Es ist unmöglich, durch Verändern von  $\tau$  und  $\xi$  (bei festgehaltenem  $f$ ) die Länge des Definitionsintervalls der maximalen Lösung beliebig klein zu machen.

**Beispiel** Wir betrachten (2.1), (2.3) mit  $n = 1, J = X = \mathbb{R}, \tau = 0, \xi = 1$  und  $f(t, x) = x^2$ , also das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x(t)^2, \quad x(0) = 1.$$

Die maximale Lösung ist

$$x(t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{für } -\infty < t < 1.$$

Aus (2.11) folgt

$$\sup_{a, b > 0} \epsilon(a, b) = \sup_{b > 0} \frac{b}{\max\{x^2 : |x - 1| \leq b\}} = \sup_{b > 0} \frac{b}{(b+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Der Blow-up-Zeitpunkt ist also  $t = 1$ , und die (im Rahmen der obigen Methode optimale) Abschätzung nach unten des Blow-up-Zeitpunkts ist  $t = 1/4$ .

**Beispiel** Wir betrachten (2.2), (2.4) mit  $n = 1, J = \mathbb{R}, X = \mathbb{R}^2, \tau = 0, \eta_0 = 2, \eta_1 = -1$  und  $g(t, y, y') = \frac{1}{2}(y')^3$ , also das Anfangswertproblem

$$y''(t) = \frac{1}{2}y'(t)^3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Die maximale Lösung ist

$$y(t) = 2\sqrt{1-t} \quad \text{für } t < 1,$$

der Blow-up-Zeitpunkt ist  $t = 1$ . Das Blow-up-Phänomen besteht hier nicht darin, dass für  $t \uparrow 1$  die Lage  $y(t)$  unbeschränkt wird, sondern die Geschwindigkeit  $y'(t)$  wird unbeschränkt. Das zeigt, dass man die Bedingung (2.10) im allgemeinen nicht ersetzen kann durch  $|y(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \uparrow \sup I$ , falls  $\sup I < \infty$ .

**Eine Wachstumsbeschränkung, die Blow-up und Urknall verhindert** Es seien  $a, b : J \rightarrow [0, \infty)$  stetige Funktionen so dass gilt

$$\|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t) \quad \text{für alle } t \in J, x \in X.$$

Dann folgt  $t_+(\tau, \xi) = \sup J$  und  $t_-(\tau, \xi) = \inf J$  für alle  $\tau \in J$  und  $\xi \in X$ .

**Eine geometrische Bedingung, die Blow-up verhindert** Es seien  $r > 0$  und  $x_0 \in X$  gegeben mit  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\} \subset X$  und

$$\langle f(t, x), x - x_0 \rangle < 0 \quad \text{für alle } t \in J \text{ und } x \in X \text{ mit } \|x - x_0\| = r.$$

Dann folgt  $t_+(\tau, \xi) = \sup J$  für alle  $\tau \in J$  und  $\xi \in X$  mit  $\|\xi - x_0\| \leq r$ .

## 2.2 Einige Tricks des analytischen LöSENS

Nur sehr wenige Anfangswertprobleme für nichtlineare Differentialgleichungen können “in geschlossener Form”, d.h. als Formel­ausdruck, in dem nur elementare Funktionen auftreten, explizit gelöst werden. In vielen Anwendungen braucht man allerdings die Lösung auch nicht in geschlossener Form, denn in Anwendungen werden meist nur spezielle Fragen, die Lösung betreffend, gestellt, und diese können oft beantwortet werden ohne dass man die Lösung in geschlossener Form kennt. Außerdem existieren zahlreiche Verfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen. Trotzdem sind die wenigen Differentialgleichungen, deren Anfangswertprobleme in geschlossener Form gelöst werden können, von großer Bedeutung in Theorie und Anwendungen. Sie zeigen als Beispiele, was man im allgemeinen erwarten kann, sie ermöglichen die Betrachtung von Eigenschaften, die sich einer numerischen Untersuchung entziehen, sie sind als benchmarks für numerische Verfahren geeignet usw.

In diesem Unterkapitel beschreiben wir einige Klassen von nichtlinearen Differentialgleichungen, für die analytische Algorithmen, die evtl. Lösungen in geschlossener Form liefern, existieren.

### 2.2.1 Gleichungen mit getrennten Variablen

Wir betrachten Anfangswertprobleme vom Typ

$$x'(t) = f(x(t))g(t), \quad x(\tau) = \xi \quad (2.12)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , einer stetigen Funktion  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ , offenen Intervallen  $J, X \subseteq \mathbb{R}$  und Anfangsdaten  $\tau \in J$  und  $\xi \in X$ .

**Satz** Es sei  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$ ,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Stammfunktion von  $1/f$ , und  $G : J \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Stammfunktion von  $g$ . Ferner sei  $I \subseteq J$  das maximale Intervall mit

$$G(I) \subseteq G(\tau) - F(\xi) + F(X) \text{ und } \tau \in I.$$

Dann ist

$$x : I \rightarrow X : x(t) := F^{-1}(G(t) - G(\tau) + F(\xi))$$

die maximale Lösung von (2.12).

**Algebraische Gleichung zur Berechnung der Lösung** Eine algebraische Gleichung zur Berechnung der Werte  $x(t)$  der maximalen Lösung von (2.12) ist

$$\int_{\xi}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{\tau}^t g(s) ds, \quad (2.13)$$

und der Definitionsbereich dieser maximalen Lösung ist das größte Intervall  $I \subseteq J$ , das  $\tau$  enthält und das die Eigenschaft besitzt, dass für alle  $t \in I$  die Gleichung (2.13) eine Lösung  $x(t) \in X$  besitzt. Diese Lösung ist dann eindeutig, weil  $F$  streng monoton ist (weil alle Werte  $F'(x) = 1/f(x)$  mit  $x \in X$  gleiches Vorzeichen besitzen).

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 2tx(t)^2, \quad x(1) = 1.$$

Das ist ein Anfangswertproblem vom Typ (2.12) mit  $f(x) = x^2$ ,  $g(t) = 2t$ ,  $\tau = \xi = 1$ ,  $J = \mathbb{R}$  und  $X = (0, \infty)$  (weil  $X$  ein offenes Intervall sein soll mit  $\xi \in X$  und  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$ ). Die algebraische Gleichung (2.13) ist dann

$$\int_1^{x(t)} \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{x(t)} + 1 = \int_1^t 2s ds = t^2 - 1. \quad (2.14)$$

Das größte Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , das die Eins enthält und das die Eigenschaft besitzt, dass für alle  $t \in I$  die Gleichung (2.14) eine Lösung  $x(t) \in (0, \infty)$  besitzt, ist  $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , folglich ist die maximale Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2-t^2} \quad \text{für } -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}.$$

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \sin x(t), \quad x(0) = 1. \quad (2.15)$$

Das ist ein Anfangswertproblem vom Typ (2.12) mit  $f(x) = \sin x$ ,  $g(t) = 1$ ,  $\tau = 0$ ,  $\xi = 1$ ,  $J = \mathbb{R}$  und  $X = (0, \pi)$  (weil  $X$  ein offenes Intervall sein soll mit  $\xi \in X$  und  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$ ). Die algebraische Gleichung (2.13) ist dann

$$\int_1^{x(t)} \frac{dy}{\sin y} = \int_0^t ds = t. \quad (2.16)$$

Das Integral in der linken Seite von (2.16) ist keine elementare Funktion seiner oberen Integrationsgrenze  $x(t)$ , folglich kann man die Lösung  $x(t)$  von (2.16) nicht in geschlossener Form angeben. Trotzdem liefert (2.16) wichtige Informationen: Wegen

$$\lim_{x \uparrow \pi} \int_1^x \frac{dy}{\sin y} = \infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} \int_1^x \frac{dy}{\sin y} = -\infty$$

folgt, dass die maximale Lösung  $x(t)$  von (2.15) auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist und dass gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0.$$

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{t}{e^{x(t)} + 1}, \quad x(0) = 0.$$

Das ist ein Anfangswertproblem vom Typ (2.12) mit  $f(x) = 1/(e^x + 1)$ ,  $g(t) = t$ ,  $\tau = \xi = 0$  und  $J = X = \mathbb{R}$ . Die algebraische Gleichung (2.13) ist dann

$$\int_0^{x(t)} (e^y + 1) dy = e^{x(t)} + x(t) = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}. \quad (2.17)$$

Wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x) = -\infty$$

ist (2.17) nach  $x(t)$  auflösbar für alle  $t \in \mathbb{R}$ , aber die Lösung  $x(t)$  kann nicht in geschlossener Form angegeben werden. Trotzdem liefert (2.17) wichtige Informationen, z.B.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \infty.$$

## 2.2.2 Exakte Gleichungen und integrierende Faktoren

Wir betrachten Anfangswertprobleme vom Typ

$$x'(t) = -\frac{P(t, x(t))}{Q(t, x(t))}, \quad x(\tau) = \xi \quad (2.18)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen  $P, Q : J \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , offenen Intervallen  $J, X \subseteq \mathbb{R}$  und Anfangsdaten  $\tau \in J$  und  $\xi \in X$ , und es gelte  $Q(t, x) \neq 0$  für alle  $t \in J$  und  $x \in X$ .

**Satz** Für alle  $t \in J$  und  $x \in X$  gelte die sogenannte **Kompatibilitätsbedingung**

$$\partial_x P(t, x) = \partial_t Q(t, x). \quad (2.19)$$

Dann existiert eine differenzierbare Funktion  $U : J \times X \rightarrow \mathbb{R}$  so dass für alle  $t \in J$  und  $x \in X$  gilt

$$\partial_t U(t, x) = P(t, x), \quad \partial_x U(t, x) = Q(t, x). \quad (2.20)$$

Ferner sei  $I \subseteq J$  ein Intervall mit  $\tau \in I$  und  $x : I \rightarrow X$  eine Funktion mit  $x(\tau) = \xi$  und

$$U(t, x(t)) = U(\tau, \xi) \quad \text{für alle } t \in I. \quad (2.21)$$

Dann ist  $x$  eine Lösung von (2.18).

**Algebraische Gleichung zur Berechnung der Lösung** Eine algebraische Gleichung zur Berechnung der Werte  $x(t)$  der maximalen Lösung von (2.18) ist (2.21), und der Definitionsbereich dieser maximalen Lösung ist das größte Intervall  $I \subseteq J$ , das  $\tau$  enthält und das die Eigenschaft besitzt, dass für alle  $t \in I$  die Gleichung (2.21) eine Lösung  $x(t) \in X$  besitzt. Diese Lösung ist dann eindeutig, weil für alle  $t \in J$  die Funktion  $U(t, \cdot)$  streng monoton ist (weil alle Werte  $\partial_x U(t, x) = Q(t, x)$  mit  $t \in J$  und  $x \in X$  dasselbe Vorzeichen haben).

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = -\frac{e^t x(t)^2 + 2}{2e^t x(t)}, \quad x(0) = 1.$$

Das ist ein Anfangswertproblem vom Typ (2.18) mit  $P(t, x) = e^t x^2 + 2$ ,  $Q(t, x) = 2e^t x$ ,  $\tau = 0$ ,  $\xi = 1$ ,  $J = \mathbb{R}$  und  $X = (0, \infty)$ . Wegen  $\partial_x(e^t x^2 + 2) = 2e^t x = \partial_t(2e^t x)$  ist (2.19) erfüllt. Ein Potential  $U$  mit (2.20) ist z.B.  $U(t, x) = e^t x^2 + 2t$ . Die algebraische Gleichung (2.21) ist  $e^t x(t)^2 + 2t = 1$ , und die maximale Lösung ist

$$x(t) = (1 - 2t)e^{-t}, \quad t < \frac{1}{2}.$$

**Integrierende Faktoren** (i) Für alle  $t \in J$  sei  $(\partial_x P(t, x) - \partial_t Q(t, x)) / Q(t, x)$  unabhängig von  $x \in X$ , und es sei eine stetig differenzierbare Funktion  $c : J \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben mit

$$c'(t) = c(t) \frac{\partial_x P(t, x) - \partial_t Q(t, x)}{Q(t, x)} \quad \text{für alle } t \in J.$$

Dann existiert eine stetig differenzierbare Funktion  $U : J \times X \rightarrow \mathbb{R}$  so dass für alle  $t \in J$  und  $x \in X$  gilt

$$\partial_t U(t, x) = c(t)P(t, x), \quad \partial_x U(t, x) = c(t)Q(t, x). \quad (2.22)$$

(ii) Für alle  $t \in J$  und  $x \in X$  sei  $P(t, x) \neq 0$  und  $(\partial_x P(t, x) - \partial_t Q(t, x)) / P(t, x)$  unabhängig von  $t$ , und es sei eine stetig differenzierbare Funktion  $c : X \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben mit

$$c'(x) = c(x) \frac{\partial_t Q(t, x) - \partial_x P(t, x)}{P(t, x)} \text{ für alle } x \in X.$$

Dann existiert eine stetig differenzierbare Funktion  $U : J \times X \rightarrow \mathbb{R}$  so dass für alle  $t \in J$  und  $x \in X$  gilt

$$\partial_t U(t, x) = c(x)P(t, x), \quad \partial_x U(t, x) = c(x)Q(t, x).$$

Die obigen Funktionen  $c$  heißen integrierende Faktoren. Sie ermöglichen es in einigen Fällen, in denen (2.19) nicht erfüllt ist, trotzdem eine algebraische Gleichung vom Typ (2.21) zur Berechnung der maximalen Lösung von (2.18) zu erhalten.

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = -\frac{1 + 2t^2 x(t)^2}{t^3 x(t)}, \quad x(1) = 1.$$

Das ist ein Anfangswertproblem vom Typ (2.18) mit  $P(t, x) = 1 + 2t^2 x^2$ ,  $Q(t, x) = t^3 x$ ,  $\tau = \xi = 1$  und  $J = X = (0, \infty)$ . Weil

$$\frac{\partial_x P(t, x) - \partial_t Q(t, x)}{Q(t, x)} = -\frac{1}{t}$$

$x$ -unabhängig ist, kann man einen integrierenden Faktor  $c(t)$  berechnen durch

$$c'(t) = -\frac{c(t)}{t}, \text{ z.B. } c(t) = -t.$$

Ein Potential  $U$  mit (2.22) ist z.B.  $U(t, x) = t^2 + t^4 x^2$ . Die algebraische Gleichung (2.21) ist  $t^2 + t^4 x(t)^2 = 2$  und die maximale Lösung ist

$$x(t) = \sqrt{\frac{2 - t^2}{t^4}}, \quad 0 < t < \sqrt{2}.$$

### 2.2.3 Koordinatentransformationen

In diesem Unterkapitel betrachten wir allgemeine Systeme  $n$ -ter Ordnung vom Typ (2.1) unter den allgemeinen Voraussetzungen von Kap.1, nämlich dass  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f : J \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, und dass  $\partial_x f$  existiert und ebenfalls stetig ist.

**Transformiertes System** Es seien  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $\varphi : J \times Y \rightarrow X$  stetig differenzierbar mit

$$\det \partial_y \varphi(t, y) \neq 0 \text{ für alle } (t, y) \in J \times Y,$$

$I \subseteq J$  ein Intervall und  $y : I \rightarrow Y$  eine Lösung von

$$y'(t) = \partial_y \varphi(t, y(t))^{-1} (f(t, \varphi(t, y(t))) - \partial_t \varphi(t, y(t))). \quad (2.23)$$

Dann ist  $x : I \rightarrow X$ ,  $x(t) := \varphi(t, y(t))$  eine Lösung von (2.1). Das System (2.23) heißt transformiertes System zu (2.1) unter der Koordinatentransformation  $\varphi$ .

**Beispiel: Homogene Gleichungen** Es seien  $n = 1, J = X = (0, \infty)$ , und es gelte

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x) \text{ für alle } \lambda, t, x \in (0, \infty).$$

Dann transformiert  $\varphi(t, y) = ty$  ( $Y = (0, \infty)$ ) das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(\tau) = \xi \tag{2.24}$$

in das Anfangswertproblem (mit einer Gleichung mit getrennten Variablen)

$$y'(t) = \frac{f(1, y(t)) - y(t)}{t}, \quad y(\tau) = \frac{\xi}{\tau}, \tag{2.25}$$

d.h. wenn  $y : I \rightarrow (0, \infty)$  eine Lösung von (2.25) ist, so ist  $x : I \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x(t) := ty(t)$ , eine Lösung von (2.24).

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \frac{t^3}{x(t)^3}, \quad x(1) = 1.$$

Das ist ein Anfangswertproblem mit einer homogenen Gleichung. Also ist die Koordinatentransformation  $x = ty$  nützlich, sie ergibt das transformierte Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{ty(t)^3}, \quad y(1) = 1.$$

Das ist ein Problem mit getrennten Variablen, seine maximale Lösung ist

$$y(t) = \sqrt[4]{4 \ln t - 3}, \quad t > e^{-1/4}.$$

Also ist die maximale Lösung des Ausgangsproblems

$$x(t) = t \sqrt[4]{4 \ln t - 3}, \quad t > e^{-1/4}.$$

**Beispiel: Rotationsinvariante Systeme** Es seien  $n = 2, J = \mathbb{R}, X = \mathbb{R}^2$ , und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar, und das Vektorfeld  $f$  sei rotationsinvariant, d.h. es gelte

$$f(S_\theta x) = S_\theta f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \theta \in \mathbb{R} \text{ mit } S_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Dann existieren Funktionen  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (die in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetig differenzierbar sind) mit

$$f(x) = g(x_1^2 + x_2^2) x + h(x_1^2 + x_2^2) S_{\pi/2} x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.26}$$

Das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = \begin{bmatrix} r_0 \cos \theta_0 \\ r_0 \sin \theta_0 \end{bmatrix}, \quad r_0 \neq 0, \tag{2.27}$$

wird dann durch Polarkoordinaten ( $Y = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ )

$$\varphi(r, \theta) := \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

in zwei entkoppelte Anfangswertprobleme transformiert:

$$\begin{aligned} r'(t) &= g(r(t)^2) r(t), \quad r(0) = r_0 \text{ (Amplitudenproblem)}, \\ \theta'(t) &= h(r(t)^2), \quad \theta(0) = \theta_0 \text{ (Phasenproblem)}. \end{aligned}$$

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2}, & x_1(0) &= 1/2, \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) - x_2(t)\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2}, & x_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Das ist ein Anfangswertproblem vom Typ (2.27) mit (2.26) mit  $g(r^2) = 1 - r$ ,  $h(\theta) = 1$ ,  $r_0 = 1/2$  und  $\theta_0 = 0$ . Das Amplitudenproblem ist also

$$r'(t) = r(t) - r(t)^2, \quad r(0) = \frac{1}{2}.$$

Seine maximale Lösung ist

$$r(t) = \frac{e^t}{1 + e^t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Das Phasenproblem ergibt  $\theta(t) = t$ , also ist die maximale Lösung des Ausgangssystems

$$x_1(t) = \frac{e^t}{1 + e^t} \cos t, \quad x_2(t) = \frac{e^t}{1 + e^t} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## 2.2.4 Einige Typen von Gleichungen zweiter Ordnung

**Gleichungen ohne  $y$**  Wenn  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(\tau) = \eta_1$$

ist, so ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y(t) := \eta_0 + \int_{\tau}^t z(s) ds$  Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) = g(t, y'(t)), \quad y(\tau) = \eta_0, \quad y'(\tau) = \eta_1.$$

**Gleichungen ohne  $t$**  Es sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) = g(y(t), y'(t)), \quad y(0) = \eta_0, \quad y'(0) = \eta_1. \quad (2.28)$$

Dann nennt man die Kurve  $\{(y(t), y'(t)) : t \in I\}$  Trajektorie oder Phasenkurve durch den Punkt  $(\eta_0, \eta_1)$ . In seltenen Fällen ist diese Trajektorie der Graph einer Funktion  $y \mapsto z(y)$ . Aber Teile der Trajektorie können Graph einer solchen Funktion sein, und dann kann man versuchen, zunächst die Funktion  $z(y)$  zu bestimmen und erst danach mit ihrer Hilfe die Funktion  $y(t)$ .

Genauer gesagt gilt folgendes: Wenn  $z : Y \rightarrow \mathbb{R}$  Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(y) = \frac{g(y, z(y))}{z(y)}, \quad z(\eta_0) = \eta_1 \quad (2.29)$$

ist, und wenn  $y : I \rightarrow Y$  die algebraische Gleichung

$$\int_{\eta_0}^{y(t)} \frac{d\eta}{z(\eta)} = t \quad (2.30)$$

erfüllt, so ist  $y$  Lösung des Anfangswertproblems (2.28).

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y''(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)}, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Das ist ein Anfangswertproblem vom Typ (2.28), bei dem die obige Methode sogar die maximale Lösung liefert. Das Anfangswertproblem (2.29) ist

$$z'(y) = -\frac{z(y)^2}{y}, \quad z(1) = 1.$$

Dessen maximale Lösung ist  $z(y) = 1/y$ ,  $y > 0$ . Die algebraische Gleichung (2.30) ist also

$$\frac{y(t)^2 - 1}{2} = t,$$

die maximale Lösung des Ausgangsproblems ist also

$$y(t) = \sqrt{2t + 1}, \quad t > -\frac{1}{2}.$$

**Gleichungen ohne  $y'$  und ohne  $t$**  Wenn die rechte Seite der Differentialgleichung in (2.28) nicht von  $y'(t)$  abhängt, d.h. wenn (2.28) vom Typ

$$y''(t) = g(y(t)), \quad y(0) = \eta_0, \quad y'(0) = \eta_1 \quad (2.31)$$

ist, so besitzt die Differentialgleichung in (2.29) getrennte Variable, also

$$\int_{\eta_1}^{z(y)} \zeta d\zeta = \frac{1}{2} (z(y)^2 - \eta_1^2) = \int_{\eta_0}^y g(y) dy.$$

Dies in (2.30) ergibt eine algebraische Gleichung für  $y(t)$ :

$$\int_{\eta_0}^{y(t)} \left( \eta_1^2 + 2 \int_{\eta_0}^{\eta} g(\zeta) d\zeta \right)^{-1/2} d\eta = t.$$

Das ist eine etwas andere Schreibweise des Energie-Erhaltungssatzes

$$\frac{y'(t)^2}{2} - \int_{\eta_0}^{y(t)} g(z) dz = \frac{\eta_1^2}{2},$$

der für jede Lösung von (2.31) gilt.

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y''(t) = 2y(t)^3, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Das ist ein Anfangswertproblem vom Typ (2.31) (mit  $g(y) = 2y^3$ ), bei dem die obige Methode sogar die maximale Lösung liefert. Der Energie-Erhaltungssatz ergibt

$$\frac{y'(t)^2}{2} - 2 \int_1^{y(t)} z^3 dz = \frac{1}{2}, \quad \text{also } y'(t) = y(t)^2,$$

die maximale Lösung des Ausgangsproblems ist also

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t < 1.$$

## 2.2.5 Autonome Systeme zweiter Ordnung

Wir betrachten Anfangswertprobleme für autonome Systeme zweiter Ordnung:

$$x'(t) = f(x(t), y(t)), y'(t) = g(x(t), y(t)), x(0) = \xi, y(0) = \eta. \quad (2.32)$$

In seltenen Fällen ist die sogenannte Trajektorie oder Phasenkurve zu (2.32), d.h. die Bildmenge der maximalen Lösung  $(x(t), y(t))$  von (2.32), der Graph einer Funktion  $y = z(x)$ . Aber Teile der Trajektorie können Graph einer Funktion  $y = z(x)$  sein, und dann kann man versuchen, zunächst die Funktion  $z(x)$  zu bestimmen und erst danach mit ihrer Hilfe die Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$ .

Genauer gesagt gilt folgendes: Wenn  $z : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(x) = \frac{g(x, z(x))}{f(x, z(x))}, z(\xi) = \eta \quad (2.33)$$

ist und wenn  $x : I \rightarrow X$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t), z(x(t))), x(0) = \xi \quad (2.34)$$

ist, so ist  $x(t)$  gemeinsam mit  $y(t) := z(x(t))$  Lösung von (2.32).

**Beispiel** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x + \frac{2}{y(t)}, y'(t) = y(t)^2 \left( x + \frac{2}{y(t)} \right), x(0) = -1, y(0) = 1.$$

Das Anfangswertproblem (2.33) ist dann

$$z'(x) = y^2, z(-1) = 1.$$

Dessen maximale Lösung ist

$$z(x) = -\frac{1}{x}, x < 0.$$

Also ist das Anfangswertproblem (2.34)

$$x'(t) = x + \frac{2}{-1/x} = -x, x(0) = -1.$$

Die maximale Lösung des Ausgangsproblems ist also

$$x(t) = -e^{-t}, y(t) = -\frac{1}{-e^{-t}} = e^t, t \in \mathbb{R}.$$

## 2.3 Lineare Systeme und Gleichungen

Das System (2.1) heißt linear, wenn  $J = \mathbb{R}$ ,  $X = \mathbb{R}^n$  und

$$f(t, x) = A(t)x + b(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}^n$$

mit stetigen Abbildungen  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_n$  und  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist. Die Gleichung (2.2) heißt linear, wenn  $J = \mathbb{R}$ ,  $X = \mathbb{R}^n$  und

$$g(t, y_0, \dots, y_{n-1}) = a_{n-1}(t)y_{n-1} + \dots a_0(t)y_0 + b(t)$$

mit stetigen Abbildungen  $a_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Ein lineares System bzw. eine lineare Gleichung heißen **homogen**, wenn  $b(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist, ansonsten heißen sie **inhomogen**.

Alle maximalen Lösungen linearer Systeme oder Gleichungen sind auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Im weiteren werden wir nur noch von "Lösungen" sprechen, obwohl stets maximale Lösungen gemeint sind.

### 2.3.1 Algebraische Eigenschaften der Lösungsmenge und der Lösungsabbildung

In diesem Unterkapitel betrachten wir lineare Systeme  $n$ -ter Ordnung

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad (2.35)$$

die entsprechenden homogenen Systeme

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (2.36)$$

und Anfangsbedingungen

$$x(\tau) = \xi. \quad (2.37)$$

Dabei sind  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_n$  und  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

**Fundamentalsysteme** (i) Die Menge  $M_0$  aller Lösungen des homogenen Systems (2.36) ist ein  $n$ -dimensionaler Teilraum des Vektorraumes aller stetig differenzierbaren Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^n$ . Eine Basis in  $M_0$  heißt Fundamentalsystem von Lösungen von (2.36).

(ii) Die Menge  $M_b$  aller Lösungen des inhomogenen Systems (2.35) ist ein affiner Teilraum des Vektorraumes aller stetig differenzierbaren Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^n$ , genauer gesagt gilt

$$M_b = x_* + M_0 \text{ für alle } x_* \in M_b.$$

(iii) Lösungen  $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  von (2.36) bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen genau dann, wenn

$$\det[x_1(t), \dots, x_n(t)] \neq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

und das ist genau dann der Fall, wenn

$$\det[x_1(t), \dots, x_n(t)] \neq 0 \text{ für ein } t \in \mathbb{R}.$$

(iv) Lösungen  $y_1, \dots, y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der linearen homogenen Gleichung

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots a_0(t)y(t)$$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen genau dann, wenn

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) := \det \begin{bmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \neq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \quad (2.38)$$

und das ist genau dann der Fall, wenn  $W(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0$  für ein  $t \in \mathbb{R}$ . Dabei heißt  $W(y_1, \dots, y_n)(t)$  **Wronski-Determinante** der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  zum Zeitpunkt  $t$ .

**Fundamentalmatrix** Es sei  $x(t) = \hat{x}(t, \tau, \xi)$  die Lösung des Anfangswertproblems (2.36), (2.37). Dann gilt für alle  $t, \tau \in \mathbb{R}$ : Die Abbildung  $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \hat{x}(t, \tau, \xi) \in \mathbb{R}^n$  ist linear, d.h. es existiert eine Matrix  $\hat{X}(t, \tau) \in \mathbb{M}_n$  mit

$$\hat{x}(t, \tau, \xi) = \hat{X}(t, \tau)\xi \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Die Matrix  $\hat{X}(t, \tau)$  heißt Fundamentalmatrix zu dem linearen homogenen System (2.36), und es gilt für alle  $t, s, \tau \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{X}(t, \tau) &= A(t)\hat{X}(t, \tau), \quad \hat{X}(\tau, \tau) = I, \\ \hat{X}(t, \tau) &= \hat{X}(t, s)\hat{X}(s, \tau), \quad \hat{X}(t, \tau) = \hat{X}(\tau, t)^{-1}, \quad \det \hat{X}(t, \tau) > 0. \end{aligned}$$

**Satz von Liouville** Es gilt

$$\det \hat{X}(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t \operatorname{sp} A(s) ds. \quad (2.39)$$

Dabei ist  $\operatorname{sp} A(s)$  die Spur der Matrix  $A(s)$ . Daraus folgt insbesondere

$$\hat{X}(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t A(s) ds, \text{ falls } n = 1.$$

**Änderung von Volumen im Phasenraum** Für alle meßbaren Mengen  $M \subset \mathbb{R}^n$  und alle  $t, \tau \in \mathbb{R}$  gilt

$$\operatorname{vol}\{\hat{X}(t, \tau)\xi : \xi \in M\} = \operatorname{vol}M \exp \int_{\tau}^t \operatorname{sp} A(s) ds$$

Diese Formel ist typisch für die sogenannte qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Sie beantwortet eine Frage (Wie ändert sich das Volumen einer Menge im Phasenraum unter dem Einfluß der Differentialgleichung?) direkt anhand der Daten  $\operatorname{sp} A(s)$ , ohne die Lösungen auszurechnen. Insbesondere besagt diese Formel, dass nur die Diagonalelemente der Matrix  $A(s)$  Einfluß haben und nur das Volumen der Startmenge  $M$  (und nicht seine Form oder seine Lage im Phasenraum). Letzteres ist übrigens nicht mehr richtig, wenn die Differentialgleichung nichtlinear ist (vgl. Kap. 1.5).

### 2.3.2 Lineare homogene autonome Systeme

Für lineare homogene nicht-autonome Systeme und Gleichungen kann man im allgemeinen weder die Fundamentalmatrix noch ein Fundamentalsystem explizit in geschlossener Form berechnen. Für lineare homogene autonome Systeme und Gleichungen dagegen ist das möglich, wie in diesem Unterkapitel gezeigt wird.

Wir betrachten Anfangswertprobleme vom Typ

$$x'(t) = Ax(t), \quad (2.40)$$

$$x(0) = \xi \quad (2.41)$$

mit  $A \in \mathbb{M}_n$  und  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

**Ein Fundamentalsystem** Es sei  $\text{spec} A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  mit  $\lambda_j \neq \lambda_k$  für  $j \neq k$ , ( $1 \leq m \leq n$ ) und

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ für } j = 1, \dots, p, \\ \text{Im} \lambda_j > 0 \text{ für } j = p+1, \dots, p+q, \end{array} \right\} (p+2q = m).$$

Ferner sei  $\gamma_j := \dim \ker(A - \lambda_j I)$  die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda_j$  und

$$\alpha_j := \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{d^k}{d\mu^k} \det(A - \mu I)|_{\mu=\lambda_j} \neq 0 \right\} = \dim \ker(A - \lambda_j I)^n$$

seine algebraische Vielfachheit ( $1 \leq \gamma_j \leq \alpha_j$ ,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$ ). Schließlich sei

$$\{v_{jk}^l : j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, \gamma_j; l = 1, \dots, l_{jk}\}$$

eine Jordan-Basis zu  $A$  in  $\mathbb{C}^n$ , also  $l_{j1} + \dots + l_{j\gamma_j} = \alpha_j$  und

$$Av_{jk}^1 = \lambda_j v_{jk}^1$$

und

$$Av_{jk}^l = \lambda_j v_{jk}^l + v_{jk}^{l-1}, \text{ für } l = 2, 3, \dots, l_{jk}, \text{ falls } l_{jk} > 1.$$

Die Eigenvektoren und verallgemeinerten Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten seien reell gewählt. Dann bilden die folgenden  $n$  Funktionen ein Fundamentalsystem von Lösungen von (2.40):

$$e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} v_{jk}^{l-r}, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, \gamma_j, \quad l = 1, \dots, l_{jk},$$

$$\text{Re} \left( e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} v_{jk}^{l-r} \right), \quad \text{Im} \left( e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} v_{jk}^{l-r} \right), \quad j = p+1, \dots, p+q, \quad k = 1, \dots, \gamma_j, \quad l = 1, \dots, l_{jk}.$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \text{Re} \left( e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} v_{jk}^{l-r} \right) &= e^{\text{Re} \lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \left( \cos(\text{Im} \lambda_j t) \text{Re} v_{jk}^{l-r} - \sin(\text{Im} \lambda_j t) \text{Im} v_{jk}^{l-r} \right), \\ \text{Im} \left( e^{\lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} v_{jk}^{l-r} \right) &= e^{\text{Re} \lambda_j t} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{t^r}{r!} \left( \cos(\text{Im} \lambda_j t) \text{Im} v_{jk}^{l-r} + \sin(\text{Im} \lambda_j t) \text{Re} v_{jk}^{l-r} \right). \end{aligned}$$

Insbesondere, wenn alle Eigenwerte von  $A$  halbeinfach sind, d.h.  $\gamma_j = \alpha_j$  für alle  $j = 1, \dots, m$ , dann bilden die folgenden  $n$  Funktionen ein Fundamentalsystem von Lösungen von (2.40):

$$e^{\lambda_j t} v_{jk}^1, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, \gamma_j,$$

$$\text{Re} \left( e^{\lambda_j t} v_{jk}^1 \right), \quad \text{Im} \left( e^{\lambda_j t} v_{jk}^1 \right), \quad j = p+1, \dots, p+q, \quad k = 1, \dots, \gamma_j.$$

Insbesondere, wenn  $A$  symmetrisch ist, d.h.  $A = A^T$ , dann sind alle Eigenwerte halbeinfach und reell, also bilden die folgenden  $n$  Funktionen ein Fundamentalsystem von Lösungen von (2.40):

$$e^{\lambda_j t} v_{jk}^1, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, \gamma_j.$$

**Exponentialfunktion für Matrizen** Für alle  $A \in \mathbb{M}_n$  konvergiert die Reihe

$$e^A := \exp A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Die Abbildung  $A \in \mathbb{M}_n \mapsto e^A \in \mathbb{M}_n$  heißt Exponentialfunktion für Matrizen. Sie ist unendlich oft differenzierbar, und

$$x(t) = e^{At}\xi \text{ ist die Lösung von (2.40), (2.41), d.h. } \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At},$$

d.h.  $\hat{X}(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$  ist die Fundamentalmatrix zu dem linearen homogenen autonomen System (2.40). Ferner gilt:

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= e^A e^B \text{ für alle } A, B \in \mathbb{M}_n \text{ mit } AB = BA, \\ (e^A)^{-1} &= e^{-A}, \\ (e^A)^T &= e^{(A^T)}, \\ B e^A B^{-1} &= e^{BAB^{-1}} \text{ für alle } A, B \in \mathbb{M}_n \text{ mit } \det B \neq 0, \\ \det e^A &= e^{\text{sp}A} \text{ (Satz von Liouville),} \\ e^A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{A}{n} \right)^n. \end{aligned}$$

**Beispiele mit  $n = 2$**

$$\begin{aligned} \exp \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ für alle } a \in \mathbb{R}, \\ \exp \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix} \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Drehungen des  $\mathbb{R}^n$**  Es sei  $A \in \mathbb{M}_n$  eine antisymmetrische Matrix, d.h.  $A^T = -A$ . Dann gilt

$$(e^A)^T = e^{(A^T)} = e^{-A} = (e^A)^{-1},$$

d.h.  $e^A$  ist eine orthogonale Matrix mit positiver Determinante, also eine Drehung des Raumes  $\mathbb{R}^n$  um den Nullpunkt. Im Fall  $n = 2$  kann man das folgendermaßen explizit aufschreiben:

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Im Fall  $n = 3$  hat jede antisymmetrische Matrix die Form

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

und für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$Ax = \omega \times x \text{ mit } \omega := \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Es sei nun  $u \in \mathbb{R}^3$  ein beliebiger Vektor und  $v(t) := e^{At}u$ , dann folgt

$$v'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}u = Ae^{At}u = \omega \times e^{At}u = \omega \times v(t). \quad (2.44)$$

Mit anderen Worten: Die Drehungsmatrix  $e^{At}$  beschreibt die Drehung des Raumes  $\mathbb{R}^3$  mit der zeitunabhängigen vektoriellen Winkelgeschwindigkeit  $\omega \in \mathbb{R}^3$ .

Dieses Ergebnis kann man auch folgendermaßen mit Hilfe des Fundamentalsystems von Lösungen von (2.40) erhalten:

Wegen (2.43) ist Null Eigenwert von  $A$  mit Eigenvektor  $\omega$ . Ferner sind  $\pm i\|\omega\|$  Eigenwerte von  $A$ . Falls  $\|\omega\| \neq 0$ , so gilt für jeden Eigenvektor  $v \in \mathbb{C}^n$  zum Eigenwert  $i\|\omega\|$

$$\langle v, \omega \rangle = \left\langle \frac{1}{i\|\omega\|}Av, \omega \right\rangle = \frac{1}{i\|\omega\|} \langle v, A\omega \rangle = 0,$$

also  $\langle \operatorname{Re}v, \omega \rangle = \langle \operatorname{Im}v, \omega \rangle = 0$ . Ein Fundamentalsystem von Lösungen von  $x'(t) = Ax(t)$  besteht dann aus den drei Funktionen

$$\omega, \cos(\|\omega\|t)\operatorname{Re}v - \sin(\|\omega\|t)\operatorname{Im}v, \cos(\|\omega\|t)\operatorname{Im}v + \sin(\|\omega\|t)\operatorname{Re}v,$$

d.h. die Lösung  $x(t)$  von (2.40) mit dem Anfangswert  $x(0) = \xi_1\omega + \xi_2\operatorname{Re}v + \xi_3\operatorname{Im}v$  ist

$$x(t) = \xi_1\omega + \xi_2(\cos(\|\omega\|t)\operatorname{Re}v - \sin(\|\omega\|t)\operatorname{Im}v) + \xi_3(\cos(\|\omega\|t)\operatorname{Im}v + \sin(\|\omega\|t)\operatorname{Re}v),$$

also eine Drehung des Anfangswertes  $x(0)$  um die von dem Vektor  $\omega$  aufgespannte Achse mit der zeitunabhängigen skalaren Winkelgeschwindigkeit  $\|\omega\|$ .

### 2.3.3 Lineare homogene autonome Gleichungen

Wir betrachten homogene autonome Gleichungen  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0 \quad (2.45)$$

mit  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Das Polynom

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

heißt **charakteristisches Polynom** zu der Gleichung (2.45).

**Ein Fundamentalsystem** Es sei  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  mit  $\lambda_j \neq \lambda_k$  für  $j \neq k$ , ( $1 \leq m \leq n$ ) die Menge aller Nullstellen von  $P$ , und es gelte

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ für } j = 1, \dots, p, \\ \lambda_j = \mu_j + i\nu_j \text{ mit } \mu_j \in \mathbb{R} \text{ und } \nu_j > 0 \text{ für } j = p+1, \dots, p+q, \end{array} \right\} (p+2q = m).$$

Ferner sei

$$\alpha_j := \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{d^k}{d\lambda^k} P(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} \neq 0 \right\}$$

die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda_j$  ( $\alpha_j \geq 1$ ,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$ ). Dann bilden die folgenden  $n$  Funktionen ein Fundamentalsystem von Lösungen von (2.45):

$$\begin{aligned} t^l e^{\lambda_j t}, & \quad j = 1, \dots, p, \quad l = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1, \\ t^l e^{\mu_j t} \cos \nu_j t, \quad t^l e^{\mu_j t} \sin \nu_j t, & \quad j = p + 1, \dots, p + q, \quad l = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1. \end{aligned}$$

Insbesondere, wenn alle Nullstellen von  $P$  einfach sind, so bilden die folgenden  $n$  Funktionen ein Fundamentalsystem von Lösungen von (2.45):

$$\begin{aligned} e^{\lambda_j t}, & \quad j = 1, \dots, p, \\ e^{\mu_j t} \cos \nu_j t, \quad e^{\mu_j t} \sin \nu_j t, & \quad j = p + 1, \dots, p + q. \end{aligned}$$

### 2.3.4 Lineare inhomogene Systeme und Gleichungen. Variation der Konstanten

**Formel der Variation der Konstanten für Systeme** Es sei  $\hat{X}(t, \tau) \in \mathbb{M}_n$  die Fundamentalmatrix zu dem linearen homogenen System (2.36). Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems (2.35), (2.37) gleich

$$x(t) = \hat{X}(t, \tau)\xi + \int_{\tau}^t \hat{X}(t, s)b(s)ds. \quad (2.46)$$

**Spezialfall** Wenn für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  gilt  $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ , also insbesondere im Fall  $n = 1$ , so folgt

$$\hat{X}(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t A(s)ds.$$

Also ist die Lösung von (2.35), (2.37) gleich

$$x(t) = \left( \exp \int_{\tau}^t A(s)ds \right) \xi + \int_{\tau}^t \left( \exp \int_s^t A(r)dr \right) b(s)ds.$$

Diese Formeln sind im allgemeinen nicht richtig, wenn  $A(s)A(t) \neq A(t)A(s)$  für gewisse  $s \neq t$ .

**Methode der Variation der Konstanten** Der folgende Algorithmus zur Lösung von (2.35), (2.37) wird oft Methode der Variation der Konstanten genannt:

Bestimme zunächst ein Fundamentalsystem  $z_1, \dots, z_n$  von Lösungen von (2.36). Löse dann für jedes  $t \in \mathbb{R}$  das lineare inhomogene (algebraische) Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n c'_j(t)z_j(t) = b(t) \quad (2.47)$$

bzgl.  $c'_1(t), \dots, c'_n(t) \in \mathbb{R}$ . Löse dann das lineare inhomogene (algebraische) Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n c_j(\tau)z_j(\tau) = \xi \quad (2.48)$$

bzgl.  $c_1(\tau), \dots, c_n(\tau) \in \mathbb{R}$ . Bestimme schließlich die Lösung von (2.35), (2.37) durch

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \left( c_j(\tau) + \int_{\tau}^t c'_j(s)ds \right) z_j(t). \quad (2.49)$$

**Verhältnis der Lösungsdarstellungen (2.46) und (2.49)** Die Lösungsdarstellung (2.46) hat, wenn die Fundamentalmatrix  $\hat{X}(t, \tau)$  gegeben ist, zwei Vorteile: Erstens zeigt sie explizit die Abhängigkeit der Lösung von den Daten  $b$  und  $\xi$ , das ist für theoretische Betrachtungen nützlich. Und zweitens muß man, wenn die Lösung für viele verschiedene rechte Seiten  $b$  und Anfangswerte  $\xi$  (aber für fixierte Koeffizientenmatrix  $A$ ) berechnen will, jeweils nur Matrizenmultiplikationen durchführen und keine neuen Gleichungen lösen. Die Lösungsdarstellungen (2.46) hat aber den Nachteil, dass zur Berechnung Fundamentalmatrix  $\hat{X}(t, \tau)$  ein sehr spezielles Fundamentalsystem von Lösungen von (2.35) berechnet werden muß. Die Spaltenvektoren von  $\hat{X}(t, \tau)$  sind nämlich das Fundamentalsystem  $z_1, \dots, z_n$  von Lösungen von (2.35) mit  $z_j(\tau) = e_j$  ( $e_1, \dots, e_n$  ist die Standard-Orthonormalbasis in  $\mathbb{R}^n$ ).

Die Lösungsdarstellung (2.49) hat dagegen den Vorteil dass nur irgendein Fundamentalsystem von Lösungen von (2.35) benötigt wird. Sie hat aber den Nachteil dass, wenn man die Lösung für viele verschiedene rechte Seiten  $b$  und Anfangswerte  $\xi$  berechnen will, immer wieder die Gleichungssysteme (2.47) und (2.48) lösen muß.

**Beispiel** Wir betrachten Anfangswertprobleme für lineare autonome Systeme mit periodischer Inhomogenität

$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \quad x(\tau) = \xi \quad (2.50)$$

mit  $A \in \mathbb{M}_n$  und einer periodischen Funktion  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir setzen voraus, dass eine Basis  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$  von Eigenvektoren von  $A$  (mit entsprechenden Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , d.h.  $Av_j = \lambda_j v_j$ ) existiert und dass  $b$  ein trigonometrisches Polynom ist, d.h.

$$b(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=-l}^l b_{jk} v_j e^{ik\omega t} \quad \text{mit } \omega > 0, \quad b_{jk} \in \mathbb{C}.$$

Nach der Formel der Variation der Konstanten ist die Lösung  $x(t)$  von (2.50) gleich

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-\tau)} \xi + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} b(s) ds = \sum_{j=1}^n \left( \xi_j e^{A(t-\tau)} v_j + \sum_{k=-l}^l b_{jk} \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} e^{ik\omega s} v_j ds \right) \\ &= \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} \left( \xi_j e^{-\lambda_j \tau} + \sum_{k=-l}^l b_{jk} \int_{\tau}^t e^{(ik\omega - \lambda_j)s} ds \right) v_j. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j v_j$  die Entwicklung des Anfangswertes  $\xi \in \mathbb{R}^n$  nach der Basis  $v_1, \dots, v_n$ . Wegen

$$\int_{\tau}^t e^{(ik\omega - \lambda_j)s} ds = \begin{cases} \frac{e^{(ik\omega - \lambda_j)t} - e^{(ik\omega - \lambda_j)\tau}}{ik\omega - \lambda_j} & \text{falls } ik\omega \neq \lambda_j, \\ t - \tau & \text{falls } ik\omega = \lambda_j \end{cases}$$

folgt:

(i) **Resonanzkatastrophe:** Wenn ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  und ein  $k \in \{-l, \dots, l\}$  existieren mit  $ik\omega = \lambda_j$  und  $b_{jk} \neq 0$  (man sagt dann, dass die sogenannte **innere Frequenz**  $\lambda_j$  des autonomen Systems  $x'(t) = Ax(t)$  mit der sogenannten **äußeren Frequenz**  $\omega$  in Resonanz ist), so folgt

$$\sup_{t \geq 0} \|x(t)\| = \infty.$$

(ii) **Erzwungene Schwingung:** Wenn für alle  $j = 1, \dots, n$  gilt  $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ , so folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_\omega(t)) = 0,$$

wobei die sogenannte erzwungene Schwingung  $x_\omega$  (die wie die sogenannte **externe Anregung**  $b$  periodisch mit der Periode  $2\pi/\omega$  ist) definiert ist durch

$$x_\omega(t) := \sum_{j=1}^n \sum_{k=-l}^l \frac{b_{jk}}{ik\omega - \lambda_j} e^{ik\omega t} v_j.$$

Je näher einer der Nenner  $ik\omega - \lambda_j$  der Null ist (d.h. je näher die Daten zu einem Resonanzfall sind), desto größer ist die Amplitude der erzwungenen Schwingung.

(iii) **Mittelung:** Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (x(t) - x_0(t)) = 0,$$

wobei  $x_0$  die Lösung des sogenannten **gemittelten Systems**

$$x_0'(t) = Ax_0(t) + b_0 \text{ mit } b_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(s) ds = \sum_{j=1}^n b_{j0} v_j$$

mit demselben Anfangswert  $x_0(\tau) = \xi$  ist. Mit anderen Worten: Schnell oszillierende Anteile in der externen Anregung  $b$  beeinflussen die Lösung von (2.50) nur gering.

**Formel der Variation der Konstanten für Gleichungen** Es sei  $z_1, \dots, z_n$  ein Fundamentalsystem von Lösungen der linearen homogenen Gleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = 0.$$

Dann ist

$$y(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} z_j(t) \int_\tau^t \frac{W(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)(s)}{W(z_1, \dots, z_n)(s)} b(s) ds \quad (2.51)$$

eine Lösungen der linearen inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b(t).$$

Dabei sind  $W(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$  bzw.  $W(z_1, \dots, z_n)$  die Wronski-Determinanten der  $n-1$  Funktionen  $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$  bzw. der  $n$  Funktionen  $z_1, \dots, z_n$  (vgl. (2.38)). Im Fall  $n = 2$  geht (2.51) über in

$$y(t) = \int_\tau^t \frac{z_1(s)z_2(t) - z_1(t)z_2(s)}{z_1(s)z_2'(s) - z_1'(s)z_2(s)} b(s) ds. \quad (2.52)$$

## 2.4 Stabilität stationärer Lösungen

In diesem Kapitel ist  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Wir betrachten allgemeine nichtlineare autonome Systeme  $n$ -ter Ordnung

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (2.53)$$

sowie allgemeine nichtlineare autonome Gleichungen  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + g(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) = 0. \quad (2.54)$$

Dabei sind  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Wir setzen voraus, dass  $x_0 \in X$  eine stationäre Lösung von (2.53) ist, d.h.

$$f(x_0) = 0,$$

und dass  $y_0 \in \mathbb{R}$  eine stationäre Lösung von (2.54) ist, d.h.  $(y_0, 0, \dots, 0) \in X$  und

$$g(y_0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Es seien  $t \in (t_-(\xi), t_+(\xi)) \mapsto \hat{x}(\xi, t)$  bzw.  $t \in (t_-(\eta), t_+(\eta)) \mapsto \hat{y}(\eta, t)$  die maximalen Lösungen von (2.53) mit der Anfangsbedingung  $x(0) = \xi \in X$  bzw. von (2.54) mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = \eta_0, y'(0) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = \eta_{n-1}$  mit  $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in X$ .

**Stabilitätsbegriffe** (i) Die stationäre Lösung  $x_0$  von (2.53) heißt **stabil**, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert so dass für alle  $\xi \in X$  gilt:

$$\text{Wenn } \|\xi - x_0\| \leq \delta, \text{ dann } \|\hat{x}(t, \xi) - x_0\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \in [0, t_+(\xi)).$$

Wenn  $x_0$  stabil ist, so folgt  $t_+(\xi) = \infty$  für alle  $\xi \approx x_0$ . Die stationäre Lösung  $x_0$  heißt **instabil**, wenn sie nicht stabil ist. Die stationäre Lösung  $x_0$  heißt **asymptotisch stabil**, wenn sie stabil ist und wenn zusätzlich ein  $\delta > 0$  existiert so dass für alle  $\xi \in X$  gilt:

$$\text{Wenn } \|\xi - x_0\| \leq \delta, \text{ dann } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t, \xi) = x_0. \quad (2.55)$$

Vorsicht:  $x_0$  kann instabil sein, obwohl (2.55) gilt!

(ii) Die stationäre Lösung  $y_0$  von (2.54) heißt stabil, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert so dass für alle  $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in X$  gilt:

$$\text{Wenn } |\eta_0 - y_0| + \sum_{j=1}^{n-1} |\eta_j| \leq \delta, \text{ dann } |\hat{y}(t, \eta) - y_0| + \sum_{j=1}^{n-1} \left| \partial_t^j \hat{y}(t, \eta) \right| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \in [0, t_+(\eta)).$$

Die stationäre Lösung  $y_0$  heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist. Die stationäre Lösung  $y_0$  heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und wenn zusätzlich ein  $\delta > 0$  existiert so dass für alle  $\eta \in X$  gilt:

$$\text{Wenn } |\eta_0 - y_0| + \sum_{j=1}^{n-1} |\eta_j| \leq \delta, \text{ dann } \lim_{t \rightarrow \infty} \left( |\hat{y}(t, \eta) - y_0| + \sum_{j=1}^{n-1} \left| \partial_t^j \hat{y}(t, \eta) \right| \right) = 0.$$

#### 2.4.1 Stabilitätskriterien anhand des Spektrums der Linearisierung. Prinzip der linearisierten Stabilität

**Ein Kriterium für asymptotische Stabilität für Systeme** Wenn die Realteile aller Eigenwerte von  $f'(x_0)$  negativ sind, so ist die stationäre Lösung  $x_0$  von (2.53) asymptotisch stabil.

**Gegenbeispiel** Das (lineare homogene) nichtautonome System

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= -x_1(t) + e^{2t}x_2(t), \\x_2'(t) &= -x_2(t)\end{aligned}$$

besitzt die stationäre Lösung  $x_1 = x_2 = 0$ . Die maximale Lösung zu den Anfangsbedingungen  $x_1(0) = \xi_1, x_2(0) = \xi_2$  ist

$$x_1(t) = \left(\xi_1 - \frac{\xi_2}{2}\right)e^{-t} + \frac{\xi_2}{2}e^t, \quad x_2(t) = \xi_2e^{-t},$$

also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t)^2 + x_2(t)^2) = \infty, \text{ falls } \xi_2 \neq 0.$$

Die stationäre Lösung  $x_1 = x_2 = 0$  ist also instabil (wenn man die obige Definition von Stabilität stationärer Lösungen auf nichtautonome Systeme übertragen würde). Die Matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

besitzt aber nur einen Eigenwert, nämlich  $-1$ , und dessen Realteil ist negativ. Mit anderen Worten: Das sogenannte Prinzip der linearisierten Stabilität (Negativität der Realteile aller Eigenwerte der Linearisierung impliziert asymptotische Stabilität) ist im allgemeinen für nichtautonome Systeme falsch.

**Eine Abschätzung der exponentiellen Abklingrate** Es sei

$$\max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \operatorname{spec}f'(x_0)\} < -\alpha < 0.$$

Dann existieren  $\delta > 0$  und  $c > 0$  so dass für alle  $\xi \in X$  gilt:

$$\text{Wenn } \|\xi - x_0\| \leq \delta, \text{ dann } \|\hat{x}(t, \xi) - x_0\| \leq ce^{-\alpha t} \text{ für alle } t > 0. \quad (2.56)$$

Mit anderen Worten: Wenn die Realteile aller Eigenwerte von  $f'(x_0)$  negativ sind, so gilt nicht nur (2.55), sondern sogar (2.56).

**Exponentielle Attraktion des gesamten Phasenraumes** Es sei  $X = \mathbb{R}^n$ , und es existiere ein  $\alpha > 0$  mit

$$\langle f(x), x - x_0 \rangle \leq -\alpha\|x - x_0\|^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann folgt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\hat{x}(t, \xi) - x_0\|^2 = \langle \hat{x}(t, \xi) - x_0, f(\hat{x}(t, \xi)) \rangle \leq -\alpha\|\hat{x}(t, \xi) - x_0\|^2 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n$$

und, wegen des Lemmas von Gronwall,

$$\|\hat{x}(t, \xi) - x_0\| \leq e^{-\alpha t} \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Ein Kriterium für Instabilität für Systeme** Wenn der Realteil eines Eigenwertes von  $f'(x_0)$  positiv ist, so ist die stationäre Lösung  $x_0$  von (2.53) instabil.

**Hamilton-Systeme** Wir betrachten das System

$$x'(t) = J\nabla\mathcal{H}(x(t)) \quad (2.57)$$

mit einer zweifach stetig differenzierbaren Funktion  $\mathcal{H} : X \rightarrow \mathbb{R}$ , dem sogenannten Hamiltonian, und einer Matrix  $J \in \mathbb{M}_n$  mit

$$J^T = -J \text{ und } \det J \neq 0.$$

Es sei  $x_0 \in X$  eine stationäre Lösung, d.h.  $\nabla\mathcal{H}(x_0) = 0$ , und  $H_{\mathcal{H}}(x_0)$  sei die Hesse-Matrix von  $\mathcal{H}$  in  $x_0$ . Dann gilt: Wenn der Realteil eines Eigenwertes von  $JH_{\mathcal{H}}(x_0)$  ungleich Null ist, so ist  $x_0$  instabil. In der Tat, es sei  $\lambda$  Eigenwert von  $JH_{\mathcal{H}}(x_0)$ , also auch von

$$(JH_{\mathcal{H}}(x_0))^T = H_{\mathcal{H}}(x_0)^T J^T = -H_{\mathcal{H}}(x_0)J.$$

Dann existiert ein  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  mit  $-H_{\mathcal{H}}(x_0)Jv = \lambda v$ , also  $JH_{\mathcal{H}}(x_0)Jv = -\lambda Jv$ , also ist  $Jv$  Eigenvektor zum Eigenwert  $-\lambda$  von  $JH_{\mathcal{H}}(x_0)$ . Mit anderen Worten: Wenn der Realteil eines Eigenwertes  $\lambda$  von  $JH_{\mathcal{H}}(x_0)$  ungleich Null ist, so ist einer der Realteile der Eigenwerte  $\lambda$  oder  $-\lambda$  positiv, und folglich ist die stationäre Lösung  $x_0$  instabil.

Wenn dagegen die Realteile aller Eigenwerte von  $JH_{\mathcal{H}}(x_0)$  verschwinden, so kann  $x_0$  stabil sein, aber nicht asymptotisch stabil (das kann aber erst mit den Ergebnissen des übernächsten Unterkapitels gezeigt werden).

**Zeitlich reversible Systeme** Wir betrachten das System

$$x''(t) = f(x(t), x'(t))$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$f(x, -x') = f(x, x') \text{ für alle } x, x' \in \mathbb{R}^n. \quad (2.58)$$

Dann ist mit jeder Lösung  $x(t)$  auch  $x(-t)$  Lösung, deshalb nennt man das System zeitlich reversibel. Es sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  eine stationäre Lösung, d.h.  $f(x_0, 0) = 0$ . Wegen (2.58) gilt  $\partial_{x'} f(x_0, 0) = 0$ , also

$$\frac{d}{d(x, y)} \begin{bmatrix} y \\ f(x, y) \end{bmatrix}_{x=x_0, y=0} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \partial_x f(x_0, 0) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Wenn  $\lambda$  Eigenwert von (2.59) ist und  $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  zugehöriger Eigenvektor, so ist auch  $-\lambda$  Eigenwert von (2.59), und  $(u, -v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  ist zugehöriger Eigenvektor. Also, wenn der Realteil eines Eigenwertes von (2.59) ungleich Null ist, so ist  $x_0$  instabil.

**Kriterien für Gleichungen höherer Ordnung** Wenn die Realteile aller Nullstellen des Polynoms

$$P(\lambda) := \lambda^n + \sum_{j=1}^n \partial_j g(y_0, 0, \dots, 0) \lambda^{j-1}$$

negativ sind, so ist die stationäre Lösung  $y_0$  von (2.54) asymptotisch stabil. Wenn der Realteil einer Nullstelle von  $P$  positiv ist, so ist  $y_0$  instabil. Hier  $\partial_j g$  ist die partielle Ableitung nach der  $j$ -ten Variablen von  $g$ .

**Routh-Hurwitz-Kriterien** Wie betrachten ein Polynom  $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$  mit reellen Koeffizienten  $a_j$  und die zu  $P$  gehörenden Hurwitz-Matrizen

$$H_k := \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n-2k+1} & a_{n-2k+2} & a_{n-2k+3} & a_{n-2k+4} & a_{n-2k+5} & \dots & a_{n-k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dabei ist  $a_k := 0$  für  $k < 0$ . Dann gilt:

(i) Die Realteile aller Nullstellen von  $P$  sind negativ genau dann, wenn folgende Ungleichungen

$$a_0 > 0, a_2 > 0, \dots, \det H_1 > 0, \det H_3 > 0, \dots, \quad (2.60)$$

erfüllt sind, und das ist der Fall genau dann, wenn folgende Ungleichungen

$$a_0 > 0, a_2 > 0, \dots, \det H_2 > 0, \det H_4 > 0, \dots \quad (2.61)$$

erfüllt sind. Wenn  $n$  gerade ist, so ist die Anzahl der Ungleichungen in (2.60) gleich der Anzahl der Ungleichungen in (2.61), nämlich gleich  $n$ . Wenn  $n$  ungerade ist, so ist die Anzahl der Ungleichungen in (2.61) ebenfalls gleich  $n$ , die Anzahl der Ungleichungen in (2.60) ist dann aber gleich  $n + 1$ . Deshalb ist es sinnvoll, die Ungleichungen (2.61) zu benutzen, wenn  $n$  ungerade ist. Wenn  $n$  gerade ist, dann ist es sinnvoll, die Ungleichungen (2.60) zu benutzen, weil dort die zu berechnenden Determinanten kleiner sind als die in (2.61).

(ii) Der Realteil einer Nullstelle von  $P$  ist positiv, wenn  $a_j < 0$  oder  $\det H_j < 0$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Insbesondere gilt wegen

$$\det(\lambda I - f'(x_0)) = \lambda^n - \lambda^{n-1} \operatorname{sp} f'(x_0) + \dots + (-1)^n \det f'(x_0),$$

dass die stationäre Lösung  $x_0$  von (2.53) instabil ist wenn die Spur von  $f'(x_0)$  positiv ist oder wenn  $(-1)^n \det f'(x_0)$  negativ ist.

**Spezialfälle** (i)  $n = 2$ : Die Realteile aller Nullstellen von  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  sind negativ genau dann, wenn  $a_0 > 0$  und  $a_1 > 0$ . Der Realteil einer Nullstelle ist positiv, wenn  $a_0 < 0$  oder  $a_1 < 0$ .

(ii)  $n = 3$ : Die Realteile aller Nullstellen von  $\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  sind negativ genau dann, wenn  $a_0 > 0$  und  $a_2 > 0$  und  $a_1a_2 > a_0$ . Der Realteil einer Nullstelle ist positiv, wenn  $a_0 < 0$  oder  $a_1 < 0$  oder  $a_1 < 0$  oder  $a_1a_2 < a_0$ .

(iii)  $n = 4$ : Die Realteile aller Nullstellen von  $\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  sind negativ genau dann, wenn  $a_0 > 0$  und  $a_2 > 0$  und  $a_3 > 0$  und  $a_1a_2a_3 > a_1^2 + a_3^2a_0$ . Der Realteil einer Nullstelle ist positiv, wenn  $a_0 < 0$  oder  $a_1 < 0$  oder  $a_2 < 0$  oder  $a_3 < 0$  oder  $a_2a_3 < a_1$  oder  $a_1a_2a_3 < a_1^2 + a_3^2a_0$ .

(iv)  $n = 5$ : Die Realteile aller Nullstellen von  $\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  sind negativ genau dann, wenn  $a_0 > 0$  und  $a_2 > 0$  und  $a_4 > 0$  und  $a_3a_4 > a_2$  und

$$a_1(a_2a_3a_4 + a_0a_4 - a_2^2 - a_1a_4^2) > a_0(a_3^2a_4 + a_0a_3 - a_2a_3 - a_1^2a_4).$$

**Stabilitätswechsel** Wir betrachten die folgende Familie (parametrisiert durch den Familienparameter  $\mu \in \mathbb{R}$ ) von autonomen Gleichungen zweiter Ordnung (die der niederländischen Physiker Balthasar van der Pol erstmals betrachtete)

$$y''(t) + (2\mu - y(t))y'(t) + y(t) = 0. \quad (2.62)$$

Für alle  $\mu \in \mathbb{R}$  ist  $y(t) = 0$  eine stationäre Lösung von (2.62), und ihre Stabilität ist bestimmt durch die Nullstellen des Polynoms

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + 1 = 0, \text{ d.h. } \lambda_{1,2} = -\mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}.$$

Für  $0 < \mu < 1$  ist  $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$ , also ist die stationäre Lösung asymptotisch stabil. Für  $-1 < \mu < 0$  ist  $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} > 0$ , also ist die stationäre Lösung instabil. Man spricht deshalb von einem Stabilitätswechsel in  $\mu = 0$ . Mit anderen Worten: Für  $0 < \mu < 1$  gilt  $|y(t)| + |y'(t)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  für alle Lösungen von (2.62) mit  $|y(0)| + |y'(0)| \approx 0$ , und für  $-1 < \mu < 0$  existieren Lösungen von (2.62) so dass  $|y(t)| + |y'(t)|$  nicht gegen Null strebt für  $t \rightarrow \infty$ , obwohl  $|y(0)| + |y'(0)|$  beliebig klein ist. Aber wohin strebt  $|y(t)| + |y'(t)|$  dann, wenn nicht gegen Null? Kann man überhaupt Konvergenz erwarten?

Diese und ähnliche Fragen, die für viele Anwendungen entscheidend sind, beantwortet die sogenannte **Bifurkationstheorie** (auch für wesentlich allgemeinere als (2.62) Systeme und Gleichungen).

## 2.4.2 Liapunov-Funktionen und erste Integrale

Eine stetige Funktion  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt erstes Integral bzw. Liapunov-Funktion für (2.53) wenn gilt

$$V(\hat{x}(\cdot, \xi)) \text{ ist konstant für alle } \xi \in X \quad (2.63)$$

bzw.

$$V(\hat{x}(\cdot, \xi)) \text{ ist monoton fallend für alle } \xi \in X. \quad (2.64)$$

Analog führt man die Begriffe erstes Integral und Liapunov-Funktion für (2.54) ein.

Die Bedingung (2.63) kann man auch folgendermaßen formulieren: Für alle  $c \in \mathbb{R}$  ist die **Niveaumenge**  $N_c := \{x \in X : V(x) = c\}$  invariant bzgl. dem Fluß von (2.53), d.h. für alle  $\xi \in N_c$  gilt  $\hat{x}(t, \xi) \in N_c$  für alle  $t \in (t_-(\xi), t_+(\xi))$ . Die Bedingung (2.64) kann man ebenfalls umformulieren: Für alle  $c \in \mathbb{R}$  ist die **Subniveaumenge**  $M_c := \{x \in X : V(x) \leq c\}$  positiv-invariant bzgl. dem Fluß von (2.53), d.h. für alle  $\xi \in M_c$  gilt  $\hat{x}(t, \xi) \in M_c$  für alle  $t \in (0, t_+(\xi))$ . Wenn  $V$  differenzierbar ist, so ist (2.63) äquivalent zu

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0 \text{ für alle } x \in X,$$

und (2.64) ist äquivalent zu

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in X.$$

Die Bezeichnung "erstes Integral" ist aus folgendem Sachverhalt entstanden: Die maximale Lösung vom (2.53) mit der Anfangsbedingung  $x(0) = \xi$  erfüllt die skalare algebraische Gleichung  $V(\hat{x}(t, \xi)) = V(\xi)$ . Wenn nun diese skalare algebraische Gleichung nach einer der Komponenten von  $\hat{x}$ , z.B. nach der ersten Komponente, auflösbar ist, so kann man diese Komponente in (2.53) einsetzen, und man erhält das folgende Anfangswertproblem:

$$\left. \begin{aligned} x_2'(t) &= f_2(\hat{x}_1(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ &\dots \\ x_n'(t) &= f_n(\hat{x}_1(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), x_2(t), \dots, x_n(t)), \end{aligned} \right\} x_2(0) = \xi_2, \dots, x_n(0) = \xi_n.$$

Mit anderen Worten: Durch das Lösen einer skalaren algebraischen Gleichung kann das Anfangswertproblem für ein System  $n$ -ter Ordnung auf ein Anfangswertproblem für ein System  $(n-1)$ -ter Ordnung reduziert werden. In diesem Sinne ermöglicht das erste Integral, das die skalare algebraische Gleichung erzeugt, eine "erste Integration". Wenn man nicht nur ein, sondern sogar  $n$  erste Integrale kennt, und wenn diese in einem gewissen Sinn unabhängig voneinander sind (dann nennt man das System **vollständig integrabel**), so kann man hoffen, auf diesem Wege das Anfangswertproblem vollständig analytisch zu lösen.

**Der Satz von Emmy Noether** Für Euler-Lagrange-Systeme

$$\frac{d}{dt} \nabla_{x'} L(t, x(t), x'(t)) = \nabla_x L(t, x(t), x'(t)). \quad (2.65)$$

mit einer zweifach stetig differenzierbaren Lagrange-Funktion  $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  existiert ein erstaunlicher Algorithmus, wie man von Struktureigenschaften von  $L$  auf erste Integrale von (2.65) schließen kann. Genauer gesagt gilt folgendes: Es seien  $X : [-1, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T : [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweifach stetig differenzierbare Funktionen, so dass gilt

$$X(0, x) = x, \quad T(0, t) = t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.66)$$

und

$$\partial_s \{L(t, X(s, x(T(s, t))), \partial_t [X(s, x(T(s, t)))]\}_{s=0} = \frac{d}{dt} K(t, x(t), x'(t)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \quad (2.67)$$

und für alle glatten Funktionen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(t, x, x') := \langle \nabla_{x'} L(t, x, x'), \partial_s X(0, x) + x' \partial_s T(0, t) \rangle - K(t, x, x')$$

ein erstes Integral für (2.65).

**Energie-Erhaltung** Wenn  $L$  unabhängig von  $t$  ist, also  $L = L(x, x')$ , dann gilt (2.66) und (2.67) mit  $X(s, x) = x$ ,  $T(s, t) = s + t$  und  $K(t, x, x') = L(x, x')$ , und wir erhalten das erste Integral für (2.65)

$$V(x, x') := \langle \nabla_{x'} L(x, x'), x' \rangle - L(x, x').$$

**Impuls-Erhaltung** Wenn  $L$  invariant ist bzgl. Translationen in Richtung eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^n$ , also

$$L(t, x + sv, x') = L(t, x, x') \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R} \text{ und } x, x' \in \mathbb{R}^n,$$

dann gilt (2.66) und (2.67) mit  $X(s, x) = x + sv$ ,  $T(s, t) = t$  und  $K(t, x, x') = 0$ , und wir erhalten das erste Integral für (2.65)

$$V(t, x, x') := \langle \nabla_{x'} L(t, x, x'), v \rangle.$$

**Impulsmoment-Erhaltung** Es sei  $n = 3$ , und  $L$  sei invariant ist bzgl. Drehungen des Raumes  $\mathbb{R}^3$  mit zeitunabhängiger Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

d.h.

$$L(t, e^{As}x, e^{As}x') = L(t, x, x') \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R} \text{ und } x, x' \in \mathbb{R}^n, \text{ wobei } A := \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wegen (2.44) gilt dann

$$\frac{d}{ds}e^{As}x = \omega \times e^{As}x.$$

Daraus folgt (2.66) und (2.67) mit  $X(s, x) = e^{As}x$ ,  $T(s, t) = t$  und  $K(t, x, x') = 0$ , und wir erhalten das erste Integral für (2.65)

$$V(t, x, x') := \langle \nabla_{x'}L(t, x, x'), \omega \times x \rangle.$$

### 2.4.3 Stabilitätskriterien anhand von Liapunov-Funktionen und ersten Integralen

**Ein Kriterium für Stabilität** Es sei  $V$  eine Liapunov-Funktion für (2.53), und es gelte

$$x_0 \text{ ein strenges lokales Minimum von } V. \quad (2.68)$$

Dann ist  $x_0$  stabil. Wenn dabei  $V$  sogar erstes Integral für (2.53) ist, so ist  $x_0$  nicht asymptotisch stabil.

**Ein Kriterium für asymptotische Stabilität** Es sei  $V$  eine Liapunov-Funktion für (2.53), und es gelte (2.68). Ferner existiere ein  $r > 0$  so dass für alle  $\xi \in X$  mit  $0 < \|\xi - x_0\| < r$  folgendes gilt:

$$t \mapsto V(\hat{x}(t, \xi)) \text{ ist in einem offenen Intervall um Null streng monoton fallend.} \quad (2.69)$$

Dann ist  $x_0$  asymptotisch stabil. Wenn  $V$  differenzierbar ist, so folgende Bedingung hinreichend für (2.69):

$$\langle \nabla V(\xi), f(\xi) \rangle < 0. \quad (2.70)$$

**Eine Abschätzung des Einzugsbereichs** Es sei  $V$  eine Liapunov-Funktion für (2.53) mit (2.68), dann gilt:

(i) Wenn für ein  $c \geq V(x_0)$  die Menge  $M_c := \{x \in X : V(x) \leq c\}$  abgeschlossen und beschränkt ist und wenn (2.69) gilt für alle  $\xi \in M_c \setminus \{x_0\}$ , dann ist  $M_c$  Teilmenge des sogenannten **Einzugsbereichs**

$$E(x_0) := \{\xi \in X : t_+(\xi) = \infty \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t, \xi) = x_0\}$$

von  $x_0$ .

(ii) Wenn  $X = \mathbb{R}^n$  ist, wenn (2.69) für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$  gilt und wenn  $V(x) \rightarrow \infty$  für  $\|x\| \rightarrow \infty$ , dann folgt  $E(x_0) = \mathbb{R}^n$ .

**Beispiel** Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t)^3 + y(t), \\ y'(t) &= -x(t) - y(t)^5. \end{aligned}$$

Die Lösung  $x = y = 0$  ist stationär, die Linearisierung in dieser stationären Lösung ist

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

die entsprechenden Eigenwerte sind  $\pm i$ , liefern also keine Information bzgl. Stabilität. Aber die Liapunov-Funktion

$$V(x, y) := x^2 + y^2$$

liefert, dass die stationäre Lösung asymptotisch stabil ist und dass ihr Einzugsbereich der gesamte Phasenraum  $\mathbb{R}^2$  ist.

**Gradientensysteme** Wir betrachten das System

$$x'(t) = -\nabla V(x(t)) \tag{2.71}$$

mit einer zweifach stetig differenzierbaren Funktion  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $V$  Liapunov-Funktion für (2.71). Jedes strenge lokale Minimum von  $V$  ist eine stabile stationäre Lösung  $x_0$  von (2.71). Diese stabile stationäre Lösung ist asymptotisch stabil, wenn  $\nabla V(x) \neq 0$  für alle  $x \neq x_0$  nahe  $x_0$ , denn dann gilt (2.70).

**Mechanische Systeme ohne Reibung** Wir betrachten das System

$$y''(t) = -\nabla U(y(t)) \tag{2.72}$$

mit einer zweifach stetig differenzierbaren Funktion  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $V : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(y, y') := \frac{1}{2} \|y'\|^2 + U(y),$$

ein erstes Integral für (2.72). Jedes strenge lokale Minimum von  $U$  ist eine stabile (aber nicht asymptotisch stabile) stationäre Lösung von (2.72).

**Mechanische Systeme mit Reibung** Wir betrachten das System

$$m_j y_j''(t) + \alpha_j(y(t), y'(t)) y_j'(t) + \partial_j U(y(t)) = 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{2.73}$$

mit Konstanten  $m_j > 0$ , stetig differenzierbaren Funktionen  $\alpha_j : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  und einer zweifach stetig differenzierbaren Funktion  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $V : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(y, y') := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j y_j'^2 + U(y),$$

Liapunov-Funktion für (2.73), denn für jede Lösung von (2.73) gilt

$$\frac{d}{dt} V(y(t), y'(t)) = - \sum_{j=1}^n \alpha_j(y(t), y'(t)) y_j'(t)^2 \leq 0.$$

Folglich ist jedes strenge lokale Minimum  $y_0$  von  $U$  eine stabile stationäre Lösung von (2.73). Diese stabile stationäre Lösung ist sogar asymptotisch stabil, wenn für alle  $y \neq y_0$  nahe  $y_0$  gilt  $\nabla U(y) \neq 0$  und wenn  $\alpha_j(y_0, 0) > 0$  für alle  $j = 1, \dots, n$ , denn aus diesen Bedingungen folgt (2.69) (aber nicht (2.70)!).

**Mathematisches Pendel mit Reibung** Wir betrachten die Gleichung

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \sin y(t) = 0$$

mit einem Reibungskoeffizienten  $\alpha > 0$  und der Liapunov-Funktion

$$V(y, y') := \frac{1}{2}y'^2 - \cos y.$$

Die stationäre Lösung  $y = y' = 0$  ist strenges lokales Minimum von  $V$ . Aber leider ist für  $c \geq V(0, 0) = -1$  die Subniveaumenge

$$M_c = \{(y, y') \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}y'^2 - \cos y \leq c\}$$

nicht beschränkt, sodass das obige Kriterium zur Abschätzung des Einzugsbereiches der stationären Lösung nicht unmittelbar angewendet werden kann. Man kann aber dieses Kriterium verschärfen, indem man nur von der sogenannten  $x_0$ -Zusammenhangskomponente von  $M_c$ , d.h. von der größten bogenzusammenhängenden Teilmenge von  $M_c$ , die  $x_0$  enthält, fordert beschränkt und abgeschlossen zu sein. Dann gilt das Kriterium immer noch. Für  $-1 \leq c < 1$  ist die  $(0, 0)$ -Zusammenhangskomponente von  $M_c$  gleich

$$\{(y, y') \in (-1, 1) \times (-\pi, \pi) : \frac{1}{2}y'^2 - \cos y \leq c\}$$

und folglich beschränkt und abgeschlossen. Also gilt für alle Lösungen mit  $y(0) \in (-1, 1)$  und  $y'(0) \in (-\pi, \pi)$  und  $\frac{1}{2}y'(0)^2 - \cos y(0) \leq c$ , dass  $y(t) \rightarrow 0$  und  $y'(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

**Hamilton-Systeme** Wir betrachten das System

$$q'_j(t) = \partial_{p_j} \mathcal{H}(q(t), p(t)), \quad p'_j(t) = -\partial_{q_j} \mathcal{H}(q(t), p(t)), \quad j = 1, \dots, n \quad (2.74)$$

mit einer zweifach stetig differenzierbaren Funktion  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $\mathcal{H}$  ein erstes Integral für (2.57). Jedes strenge lokale Minimum von  $\mathcal{H}$  ist eine stabile (aber nicht asymptotisch stabile) stationäre Lösung von (2.57).

**Räuber-Beute-Systeme** Wir betrachten im Phasenraum  $(0, \infty)^2$  das System

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t) \end{aligned} \quad (2.75)$$

mit positiven Konstanten  $a, b, c$  und  $d$ . Dann ist  $V : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(x, y) := dx + by - \ln(x^c y^a)$$

ein erstes Integral. Die sogenannte stationäre **Koexistenzlösung**  $x = c/d, y = a/b$  ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

**Räuber-Beute-Systeme mit Sättigung** Wir betrachten im Phasenraum  $(0, \infty)^2$  das System

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) - \alpha x(t)^2, \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t) \end{aligned}$$

mit positiven Konstanten  $a, b, c, d$  und  $\alpha$  mit  $ad > \alpha c$ . Dann ist

$$x_0 := \frac{c}{d}, \quad y_0 := \frac{ad - \alpha c}{bd}$$

eine asymptotisch stabile stationäre Lösung, und ihr Einzugsbereich ist der gesamte Phasenraum  $(0, \infty)^2$ . Das erhält man mit Hilfe der Liapunov-Funktion  $V : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(x, y) := d \left( x - x_0 \ln \frac{x}{x_0} \right) + b \left( y - y_0 \ln \frac{y}{y_0} \right).$$

## 2.5 Langzeitverhalten volumenerhaltender Systeme

In diesem Kapitel ist wieder  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, und wir betrachten wieder das nichtlineare autonome System  $n$ -ter Ordnung

$$x'(t) = f(x(t)). \quad (2.76)$$

Es sei  $t \in (t_-(\xi), t_+(\xi)) \mapsto \hat{x}(\xi, t)$  die maximale Lösungen von (2.76) mit der Anfangsbedingung  $x(0) = \xi \in X$ .

**Satz von Liouville** Es sei  $M \subset X$  abgeschlossen und beschränkt, dann gilt

$$t_- := \sup\{t_-(\xi) : \xi \in M\} < 0 < t_+ := \inf\{t_+(\xi) : \xi \in M\}.$$

Ferner sei  $M_t := \{\hat{x}(t, \xi) : \xi \in M\}$  für  $t \in (t_-, t_+)$ , dann gilt

$$\frac{d}{dt} \text{vol} M_t = \int_{M_t} \text{div} f(x) dx.$$

Insbesondere, wenn  $\text{div} f(x) = 0$  für alle  $x \in X$  ist, so ist  $\text{vol} M_t$  konstant bzgl.  $t$ , und dann nennt man das System (2.76) volumenerhaltend.

**Beispiele** (i) Hamiltonsche Systeme vom Typ (2.57) oder (2.74) sind volumenerhaltend.

(ii) Es seien  $X = \mathbb{R}^n$  und  $f(x) = Ax + b$  mit  $A \in \mathbb{M}_n$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\text{div} f(x) = \text{sp} A$  (die Spur von  $A$ ) für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , folglich ist in diesem Fall das System (2.76) volumenerhaltend genau dann, wenn  $\text{sp} A = 0$ .

**Wiederkehrsatz von Poincaré** Es sei  $X_0 \subseteq X$  offen und beschränkt, und für alle  $\xi \in X_0$  gelte  $\text{div} f(\xi) = 0$  und  $t_+(\xi) = \infty$  und  $\hat{x}(\xi, t) \in X_0$  für alle  $t \geq 0$ . Dann folgt: Für alle abgeschlossenen Mengen  $M \subset X_0$  und alle  $T > 0$  existieren ein  $\xi \in M$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\hat{x}(\xi, nT) \in M$ .

Grob gesprochen gilt also folgendes: Wo auch immer und wie klein auch immer eine Menge  $M$  im Phasenraum gewählt wird und wie groß auch immer  $T > 0$  gewählt wird, es existiert mindestens ein Anfangswert  $\xi \in M$  so dass die entsprechende Lösung zu einer Zeit  $t > T$  nach  $M$  zurückkehrt (und dann immer wieder zurückkehrt).

Es gilt sogar mehr: Die Menge aller Anfangswerte, so dass die entsprechende Lösung nicht nach  $M$  zurückkehrt, ist eine Nullmenge. Wenn also ein Astronaut beim Außeneinsatz am Raumschiff sein Werkzeug verliert, so kommt mit Wahrscheinlichkeit Eins das Werkzeug irgendwann beliebig nahe zum Raumschiff zurück. Das kann allerdings sehr lange dauern!

### 3 Rand- und Eigenwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen

In diesem Kapitel sind  $a < b$  reelle Zahlen. Mit  $C([a, b])$  bzw.  $C^k([a, b])$  (für  $k \in \mathbb{N}$ ) bezeichnen wir die Vektorräume der stetigen bzw.  $k$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir betrachten lineare Gleichungen zweiter Ordnung vom Typ

$$u''(x) + c_1(x)u'(x) + c_0(x)u(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (3.1)$$

Die unabhängige Variable  $x \in [a, b]$  ist in fast allen Anwendungen eine Ortsvariable, deshalb wird sie traditionell mit  $x$  bezeichnet, und die abhängige Variable wird dann mit  $u$  bezeichnet. Gegeben sind  $c_0, c_1, f \in C([a, b])$ , und gesucht ist  $u \in C^2([a, b])$ , das (3.1) sowie zwei weitere Bedingungen, sogenannte Randbedingungen, erfüllt. Die in Anwendungen am häufigsten auftretenden Randbedingungen sind erstens die sogenannte **Robin-Randbedingung** (oder Randbedingung dritter Art)

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \alpha, \quad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \beta \quad (3.2)$$

mit reellen Konstanten  $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \beta, \beta_0, \beta_1$  so dass

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0 \quad \text{und} \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 > 0 \quad (3.3)$$

gilt, sowie zweitens die sogenannte **periodische Randbedingung**

$$u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b).$$

Spezialfälle von (3.2) sind die sogenannte **Dirichlet-Randbedingung** (oder Randbedingung erster Art)  $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$ , die **Neumann-Randbedingung** (oder Randbedingung zweiter Art)  $u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta$  und die gemischte Randbedingung  $u(a) = \alpha, u'(b) = \beta$ .

**Beispiele** (i) Das Problem  $u''(x) = 1, a \leq x \leq b, u'(a) = u'(b) = 0$  besitzt **keine Lösung**.

(ii) Das Problem  $u''(x) = 0, a \leq x \leq b, u'(a) = u'(b) = 0$  besitzt **unendlich viele verschiedene Lösungen**, nämlich alle konstanten Funktionen auf  $[a, b]$ .

(iii) Das Problem  $u''(x) = 0, a \leq x \leq b, u(a) = u(b) = 0$  besitzt **genau eine Lösung**, nämlich  $u = 0$ .

(iv) Bei nichtlinearen Gleichungen wird die Vielfalt des möglichen Lösungsverhaltens noch größer: Das Problem  $u''(x) + u(x)^2 = 1, a \leq x \leq b, u'(a) = u'(b) = 0$  besitzt **genau zwei Lösungen**, nämlich  $u = \pm 1$ .

#### 3.1 Anwendungsgebiete

##### 3.1.1 Variationsrechnung

**Lokale Extrema von Funktionalen, die durch Integrale definiert sind** Es seien eine stetige Abbildung  $G : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , eine Abbildung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gegeben. Wir bezeichnen

$$U := \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha\}, \quad U_0 := \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = 0\}$$

und ein sogenanntes Funktional auf  $U$  durch

$$\mathcal{G} : U \rightarrow \mathbb{R} : \mathcal{G}(u) := \int_a^b G(x, u(x), u'(x)) dx + g(u(b)).$$

Eine Funktion  $u \in U$  heißt lokales Minimum von  $\mathcal{G}$ , wenn für alle  $v \in U_0$  ein  $\varepsilon_0 > 0$  existiert so dass für alle  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  gilt

$$\mathcal{G}(u + \varepsilon v) \geq \mathcal{G}(u).$$

Analog definiert man lokale Maxima von  $\mathcal{G}$ .

**Euler-Lagrange-Gleichung und natürliche Randbedingung** Wenn  $G$  zweifach stetig differenzierbar ist und  $g$  einfach stetig differenzierbar und wenn  $u \in C^2([a, b])$  ein lokales Minimum oder Maximum von  $\mathcal{G}$  ist, so gilt

$$\frac{d}{dx} \partial_{u'} G(x, u(x), u'(x)) = \partial_u G(x, u(x), u'(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad (\text{Euler-Lagrange-Gleichung}) \quad (3.4)$$

und

$$\partial_{u'} G(b, u(b), u'(b)) + g'(u(b)) = 0 \quad (\text{natürliche Randbedingung}). \quad (3.5)$$

Insbesondere, wenn

$$G(x, u, u') = \frac{1}{2} (u'^2 + a_1(x)u'u + a_0(x)u^2) + f(x)u, \quad g(u) = -\beta u(b),$$

so ist (3.4) vom Typ (3.1) mit  $c_1 = 0$  und  $c_0 = \frac{1}{2}(a_1' - a_1) - a_0$ , und (3.5) ist dann vom Typ der Randbedingung in  $x = b$  von (3.2) mit  $\beta_1 = 1$  und  $\beta_0 = a_1(b)$ .

### 3.1.2 Radialsymmetrische Lösungen von partiellen Differentialgleichungen

Als Beispiel betrachten wir für  $0 < a < b$  das folgende Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} \partial_x^2 v(x, y) + \partial_y^2 v(x, y) &= f(x^2 + y^2) && \text{für } a \leq x^2 + y^2 \leq b, \\ v(x, y) &= \alpha && \text{für } x^2 + y^2 = a, \\ v(x, y) &= \beta && \text{für } x^2 + y^2 = b, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

das unter bestimmten Bedingungen (Homogenität, Isotropie, Vernachlässigung der dritten Raumdimension) die stationäre Temperaturverteilung in einem **Kreisring** beschreibt, wenn am Rand die Temperatur vorgegeben ist. Wenn man nur Lösungen sucht, die in Polarkoordinaten  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  nicht vom Winkel  $\theta$  abhängen (radialsymmetrische Lösungen), wenn man also den Ansatz

$$u(r) := v(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (3.7)$$

macht, so erhält man für die neue unbekannte Funktion  $u$  das Problem

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{u'(r)}{r} &= f(r^2), \quad a \leq r \leq b, \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta, \end{aligned}$$

also ein Problem vom Typ (3.1), (3.2).

Wenn man dasselbe Problem in einem **Kreis** betrachtet, also

$$\left. \begin{aligned} \partial_x^2 v(x, y) + \partial_y^2 v(x, y) &= f(x^2 + y^2) & \text{für } x^2 + y^2 \leq b, \\ v(x, y) &= \beta & \text{für } x^2 + y^2 = b, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

und denselben Ansatz (3.7) macht, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} u''(r) + \frac{u'(r)}{r} &= f(r^2), \quad 0 \leq r \leq b, \\ u(b) &= \beta, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

und das ist kein Problem vom Typ (3.1), (3.2), erstens weil der Koeffizient bei  $u'$  nicht in  $r = 0$  definiert ist und zweitens weil nur eine Randbedingung auftritt. Diese Schwierigkeit tritt immer auf, wenn man in partiellen Differentialgleichungen Polar- oder Kugel- oder Zylinderkoordinaten einführt und wenn der Nullpunkt in der Menge der unabhängigen Ortsparameter liegt: Die Lösungen  $v$  der partiellen Differentialgleichung sind beschränkt und glatt in der Nähe des Nullpunktes. Dagegen sind einige Koeffizienten der gewöhnlichen Differentialgleichung unbeschränkt bei  $r \rightarrow 0$ , und folglich sind auch einige Lösungen  $v$  der gewöhnlichen Differentialgleichung unbeschränkt bei  $r \rightarrow 0$ . Diese "künstlichen" oder "unphysikalischen" Lösungen von (3.9), für die keine entsprechenden Lösungen von (3.8) existieren, müssen ausgeschlossen werden, im Fall (3.9) z.B. durch Hinzufügen einer zweiten Randbedingung  $u'(0) = 0$ . Dadurch erhält man aber immer noch kein Problem vom Typ (3.1), (3.2), weil der Koeffizient in (3.9) bei  $u'$  in  $r = 0$  immer noch nicht definiert ist.

### 3.2 Randwertprobleme für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Neben dem inhomogenen Randwertproblem (3.1), (3.2) betrachten wir das homogene Randwertproblem

$$u''(x) + c_1(x)u'(x) + c_0(x)u(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (3.10)$$

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0. \quad (3.11)$$

Wir setzen (3.3) voraus und  $c_0, c_1, f \in C([a, b])$ . Mit  $M_{f, \alpha, \beta}$  bzw.  $M_0$  bezeichnen wir die Mengen aller Lösungen von (3.1), (3.2) bzw. von (3.10), (3.11).

**Lösungsverhalten von (3.1), (3.2) und von (3.10), (3.11)** (i)  $M_0$  ist ein Teilraum des Vektorraumes  $C^2([a, b])$  mit  $0 \leq \dim M_0 \leq 1$ , und  $M_{f, \alpha, \beta}$  ist ein affiner Teilraum von  $C^2([a, b])$ , genauer gesagt gilt

$$M_{f, \alpha, \beta} = u_* + M_0 \quad \text{für alle } u_* \in M_{f, \alpha, \beta}.$$

(ii) Fredholmsche Alternative: Entweder (3.10), (3.11) besitzt eine Lösung  $u \neq 0$  (d.h.  $\dim M_0 = 1$ ) oder (3.1), (3.2) besitzt für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $f \in C([a, b])$  genau eine Lösung.

(iii) Es gilt  $\dim M_0 = 0$  (d.h. (3.10), (3.11) besitzt keine Lösung  $u \neq 0$ ) genau dann, wenn für ein Fundamentalsystem  $u_1, u_2$  von Lösungen von (3.10) gilt

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_0 u_1(a) + \alpha_1 u_1'(a) & \beta_0 u_1(b) + \beta_1 u_1'(b) \\ \alpha_0 u_2(a) + \alpha_1 u_2'(a) & \beta_0 u_2(b) + \beta_1 u_2'(b) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (3.12)$$

und das ist genau dann der Fall, wenn (3.12) für jedes Fundamentalsystem  $u_1, u_2$  von Lösungen von (3.10) gilt.

In der Regel ist es nicht möglich, ein Fundamentalsystem von Lösungen von (3.10) explizit anzugeben. Deshalb ist die Bedingung (3.12) schwer zu verifizieren. Es existieren aber hinreichende Bedingungen für (3.12), z.B.:

**Eine hinreichende Bedingung für (3.12)** Es gelte

$$c_0(x) < 0 \text{ für alle } x \in [a, b] \text{ und } \alpha_0\alpha_1 = \beta_0\beta_1 = 0.$$

Dann folgt aus (3.10), (3.11)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b e^{\int_a^x c_1(y)dy} (u''(x) + c_1(x)u'(x) + c_0(x)u(x)) u(x) dx \\ &= \int_a^b \left( \left( e^{\int_a^x c_1(y)dy} u'(x) \right)' + c_0(x) e^{\int_a^x c_1(y)dy} u(x) \right) u(x) dx \\ &= \int_a^b \left( -e^{\int_a^x c_1(y)dy} u'(x)^2 + c_0(x) e^{\int_a^x c_1(y)dy} u(x)^2 \right) dx \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} c_0(x) \int_a^b e^{\int_a^x c_1(y)dy} u(x)^2 dx, \end{aligned}$$

also  $u = 0$ . Folglich ist  $\dim M_0 = 0$ , d.h. (3.12) ist erfüllt. Die Bedingung  $\alpha_0\alpha_1 = \beta_0\beta_1 = 0$  bedeutet, dass in den Randpunkten  $x = 0$  und  $x = 1$  die Randbedingungen entweder vom Dirichlet-Typ oder vom Neumann-Typ sind.

**Analogie zur endlich-dimensionalen linearen Algebra** Es seien  $A \in \mathbb{M}_n$  und  $f \in \mathbb{R}^n$  gegeben und

$$M_0 := \{u \in \mathbb{R}^n : Au = 0\}, \quad M_f := \{u \in \mathbb{R}^n : Au = f\},$$

dann gilt:

(i)  $M_0$  ist ein Teilraum in  $\mathbb{R}^n$  mit  $0 \leq \dim M_0 \leq n$ ,  $M_f$  ist ein affiner Teilraum in  $\mathbb{R}^n$ , genauer gesagt gilt

$$M_f = u_* + M_0 \text{ für alle } u_* \in M_f.$$

(ii) Fredholmsche Alternative: Entweder  $Au = 0$  besitzt eine Lösung  $u \neq 0$  (d.h.  $\dim M_0 > 0$ ) oder  $Au = f$  besitzt für beliebiges  $f \in \mathbb{R}^n$  genau eine Lösung.

(iii) Es gilt  $\dim M_0 = 0$  genau dann, wenn  $\det A \neq 0$ .

(iv) Es sei  $\dim M_0 = 0$ . Dann ist  $u = A^{-1}f$  die Lösung von  $Au = f$ .

**Greensche Funktion** Es sei  $u_1, u_2$  ein Fundamentalsystem von Lösungen von (3.10) mit

$$\alpha_0 u_1(a) + \alpha_1 u_1'(a) = \beta_0 u_2(b) + \beta_1 u_2'(b) = 0. \quad (3.13)$$

Dann gilt  $\dim M_0 = 0$ , insbesondere  $\beta_0 u_1(b) + \beta_1 u_1'(b) \neq 0$  und  $\alpha_0 u_2(a) + \alpha_1 u_2'(a) \neq 0$  (vgl. (3.12)), und dann ist

$$u(x) = \frac{\beta}{\beta_0 u_1(b) + \beta_1 u_1'(b)} u_1(x) + \frac{\alpha}{\alpha_0 u_2(a) + \alpha_1 u_2'(a)} u_2(x) + \int_a^b G(x, y) f(y) dy \quad (3.14)$$

die Lösung von (3.1), (3.2). Dabei ist

$$G(x, y) := \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(y)}{u_1(y)u_2'(y) - u_2(y)u_1'(y)} & \text{für } a \leq x \leq y \leq b, \\ \frac{u_1(y)u_2(x)}{u_1(y)u_2'(y) - u_2(y)u_1'(y)} & \text{für } a \leq y \leq x \leq b \end{cases}$$

die sogenannte Greensche Funktion zu dem Randwertproblem (3.1), (3.2). Die Greensche Funktion hängt nicht von der Wahl des Fundamentalsystems  $u_1, u_2$  ab. Die Formel (3.14) gibt die Lösung von (3.1), (3.2) explizit an, wenn man ein Fundamentalsystem von Lösungen von (3.10) mit (3.13) kennt. Ein solches Fundamentalsystem von Lösungen von (3.10) zu berechnen kann aber aufwendiger sein als die Lösung von (3.1), (3.2) direkt nach dem unten angegebenen Algorithmus zu berechnen. Wenn man aber für fixierte Koeffizientenfunktionen  $c_0, c_1$  und fixierte Koeffizienten  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  und für viele verschiedene rechte rechte Seiten  $f, \alpha, \beta$  die Randwertaufgabe (3.1), (3.2) lösen will, dann lohnt es sich, einmal die Greensche Funktion zu berechnen und dann für alle verschiedenen rechten Seiten die Formel (3.14) mit ein und derselben Greenschen Funktion zu benutzen. Außerdem ist die Formel (3.14) oft nützlich, wenn man qualitative Fragen an die Lösung von (3.1), (3.2) (z.B. bzgl. welcher Normen sie stetig von den rechten Seiten abhängt) beantworten will.

**Ein Algorithmus zur Lösung von (3.1), (3.2)** Berechne irgendein Fundamentalsystem  $u_1, u_2$  von Lösungen von (3.10). Setze den Ansatz (der aus der Formel der Variation der Konstanten (2.52) folgt)

$$u(x) = d_1 u_1(x) + d_2 u_2(x) + \int_a^x \frac{u_1(y)u_2(x) - u_1(x)u_2(y)}{u_1(y)u_2'(y) - u_1'(y)u_2(y)} f(y) dy$$

in die Randbedingungen (3.2) ein. Dadurch entsteht ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten  $d_1, d_2$ , das genau dann eindeutig lösbar ist, wenn (3.12) gilt. Berechne  $d_1$  und  $d_2$ .

**Beispiel: Das Dirichlet-Problem für Gleichungen mit konstanten Koeffizienten** Wir betrachten (3.1), (3.2) mit konstanten Koeffizienten  $c_0$  und  $c_1$  sowie mit Dirichlet-Randbedingungen, d.h.  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$  und  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ . Wenn

$$c_0 < \frac{c_1^2}{4},$$

so besitzt das charakteristische Polynom  $\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$  zwei verschiedene reelle Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c_1}{2} \pm \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0},$$

und die Greensche Funktion ist

$$G(x, y) = \frac{(e^{\lambda_1(x-a)} - e^{\lambda_2(x-a)}) (e^{-\lambda_2 y - \lambda_1 b} - e^{-\lambda_1 y - \lambda_2 b})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (e^{-\lambda_1 a - \lambda_2 b} - e^{-\lambda_1 b - \lambda_2 a})} \text{ für } x \leq y$$

und

$$G(x, y) = \frac{(e^{\lambda_1(x-b)} - e^{\lambda_2(x-b)}) (e^{-\lambda_2 y - \lambda_1 a} - e^{-\lambda_1 y - \lambda_2 a})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (e^{-\lambda_1 a - \lambda_2 b} - e^{-\lambda_1 b - \lambda_2 a})} \text{ für } x \geq y.$$

Wenn

$$c_0 = \frac{c_1^2}{4},$$

so besitzt das charakteristische Polynom nur eine Nullstelle

$$\lambda = -\frac{c_1}{2},$$

und die Greensche Funktion ist

$$G(x, y) = \frac{e^{\lambda(b-a)}}{b-a} \begin{cases} (x-a)(y-b) & \text{für } x \leq y, \\ (x-b)(y-a) & \text{für } y \leq x. \end{cases}$$

Wenn

$$c_0 > \frac{c_1^2}{4},$$

so besitzt das charakteristische Polynom ein konjugiert-komplexes Nullstellenpaar

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu \text{ mit } \mu := -\frac{c_1}{2}, \nu := \sqrt{c_0 - \frac{c_1^2}{4}},$$

und die Greensche Funktion ist

$$G(x, y) = \frac{e^{\mu x}}{\nu \sin(\nu(b-a))} \begin{cases} \sin(\nu(x-a)) \sin(\nu(y-b)) & \text{für } x \leq y, \\ \sin(\nu(x-b)) \sin(\nu(y-a)) & \text{für } y \leq x. \end{cases}$$

**Beispiel: Kleine Störungen von Neumann-Randbedingungen** Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \varepsilon u(0) + u'(0) &= u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Im Fall  $\varepsilon = 0$  existiert keine Greensche Funktion, weil das Problem mit  $f = 0$  Lösungen  $u \neq 0$  besitzt (nämlich alle konstanten Funktionen). Im Fall  $\varepsilon \neq 0$  ist die Greensche Funktion gleich

$$G_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} -x + 1/\varepsilon & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ -y + 1/\varepsilon & \text{für } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Insbesondere konvergiert  $G_\varepsilon(x, y)$  nicht für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 3.3 Eigenwertwertprobleme für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Es seien  $p \in C^1([a, b])$  und  $q \in C([a, b])$ , und es gelte

$$\min_{a \leq x \leq b} p(x) > 0.$$

Wir betrachten Eigenwertprobleme vom Typ

$$(p(x)v'(x))' + q(x)v(x) = \lambda v(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.15)$$

$$\alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = \beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b) = 0 \quad (3.16)$$

mit (3.3). Wenn zu einem  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine Lösung  $v \in C^2([a, b])$  mit  $v \neq 0$  von (3.15), (3.16) existiert, so heißt  $\lambda$  Eigenwert zu dem Eigenwertproblem (3.15), (3.16), und  $v$  heißt zugehörige Eigenfunktion.

**Lösungsverhalten von (3.15), (3.16)** Es existieren Folgen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R}$  und  $v_1, v_2, \dots \in C^2([a, b])$  von Eigenwerten und zugehörigen Eigenfunktionen von (3.15), (3.16), so dass gilt:

(i)  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \rightarrow -\infty$ .

(ii) Für jede Lösung  $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times C^2([a, b])$  von (3.15), (3.16) mit  $v \neq 0$  existieren ein  $j \in \mathbb{N}$  und ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda = \lambda_j$  und  $v(x) = cv_j(x)$ .

(iii) Es gilt

$$\int_a^b v_j(x)v_k(x)dx = \delta_{jk} \quad (3.17)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{j=1}^n \int_a^b f(y)v_j(y)dy v_j(x) \right|^2 dx = 0 \text{ für alle } f \in C([a, b]). \quad (3.18)$$

(iv) Es gelte  $0 \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ . Dann ist das Randwertproblem

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.19)$$

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0 \quad (3.20)$$

für jedes  $f \in C([a, b])$  eindeutig lösbar, und für die Lösung gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| u(x) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \int_a^b f(y)v_j(y)dy v_j(x) \right|^2 dx = 0. \quad (3.21)$$

(v) Es gilt

$$\lambda_1 = \sup \left\{ \int_a^b (-pv'^2 + qv^2) dx : \int_a^b v^2 dx = 1, \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = \beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b) = 0 \right\}.$$

Insbesondere, wenn dieses Supremum negativ ist (z.B. wenn  $q(x) < 0$  für alle  $x \in [a, b]$  ist), so ist die Randwertaufgabe (3.19), (3.20) für jede rechte Seite  $f \in C([a, b])$  eindeutig lösbar.

(vi) Es existieren  $c_- < c_+ < 0$  und  $k_0 \in \mathbb{N}$  so dass für alle  $k \geq k_0$  gilt  $c_- k^2 \leq \lambda_k \leq c_+ k^2$ .

(vii) Die  $k$ -te Eigenfunktion  $v_k$  besitzt im offenen Intervall  $(a, b)$  genau  $k-1$  verschiedene Nullstellen, und alle diese Nullstellen sind einfach. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von  $v_k$  liegt eine Nullstelle von  $v_{k+1}$ .

**Beispiele** (i) Die Eigenwerte und normalisierten Eigenfunktionen zu

$$\begin{aligned} v''(x) &= \lambda v(x), \quad a \leq x \leq b, \\ v(a) &= v(b) = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

sind

$$\lambda_k = - \left( \frac{k\pi}{b-a} \right)^2, \quad v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{k\pi}{b-a} (x-a), \quad k = 1, 2, \dots$$

(ii) Die Eigenwerte und normalisierten Eigenfunktionen zu

$$\begin{aligned} v''(x) &= \lambda v(x), \quad a \leq x \leq b, \\ v'(a) &= v'(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

sind

$$\lambda_1 = 0, \quad v_1(x) = \sqrt{\frac{1}{b-a}}$$

und

$$\lambda_k = - \left( \frac{(k-1)\pi}{b-a} \right)^2, \quad v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{(k-1)\pi}{b-a} (x-a), \quad k = 2, 3, \dots$$

(ii) Die Eigenwerte und normalisierten Eigenfunktionen zu

$$\begin{aligned} v''(x) &= \lambda v(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ v(0) + \varepsilon v'(0) &= v'(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

sind im Fall  $\varepsilon = 0$

$$\lambda_k^0 = - \left( \frac{2k-1}{2} \pi \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Im Fall  $\varepsilon > 0$  bezeichnen wir die Eigenwerte mit  $\lambda_1(\varepsilon) > \lambda_2(\varepsilon) > \dots$ , und dann gilt

$$\lambda_1(\varepsilon) \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \lambda_k(\varepsilon) \rightarrow \lambda_{k-1}^0 \quad (k = 2, 3, \dots) \quad \text{für} \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

**Analogie zur endlich-dimensionalen linearen Algebra** Es sei  $A \in \mathbb{M}_n$  eine symmetrische Matrix, d.h.

$$A = A^T.$$

Dann existieren Eigenwerte  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  (die Eigenwerte werden so oft aufgeführt wie ihre Vielfachheit ist) von  $A$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  (d.h.  $Av_j = \lambda_j v_j$ ), so dass gilt:

- (i) Für jedes Paar  $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  mit  $Av = \lambda v$  und  $v \neq 0$  existiert ein  $j$  mit  $\lambda = \lambda_j$ .
- (ii) Es gilt  $\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk}$  und

$$f = \sum_{j=1}^n \langle f, v_j \rangle v_j \quad \text{für alle} \quad f \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) Es gelte  $0 \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Dann ist die Gleichung  $Au = f$  für jedes  $f \in \mathbb{R}^n$  eindeutig lösbar, und für die Lösung gilt

$$u = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \langle f, v_j \rangle v_j.$$

(iv) Es gilt

$$\lambda_1 = \max_{\|v\|=1} \langle Av, v \rangle, \quad \lambda_n = \min_{\|v\|=1} \langle Av, v \rangle.$$

Insbesondere, wenn  $\lambda_n > 0$  (d.h.  $A$  ist positiv definit) oder wenn  $\lambda_1 < 0$  (d.h.  $A$  ist negativ definit) ist, so ist die Gleichung  $Au = f$  für jede rechte Seite  $f \in \mathbb{R}^n$  eindeutig lösbar.

**Konvergenz der Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen** Anstelle von (3.18) bzw. (3.21) schreibt man auch

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v_j \quad \text{bzw.} \quad u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_j} v_j \quad \text{mit} \quad c_j := \int_a^b f(y) v_j(y) dy$$

oder auch

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v_j(x) \quad \text{bzw.} \quad u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_j} v_j(x).$$

Das bedeutet aber im allgemeinen nicht, dass für jedes fixierte  $x \in [a, b]$  die Folge der Partialsummen

$$\left( \sum_{j=1}^n c_j v_j(x) \right)_{n=1}^{\infty} \quad (3.25)$$

konvergiert oder dass, wenn sie konvergiert, sie gegen die Zahl  $f(x)$  konvergiert. Im Gegenteil: Die Partialsummen erfüllen die Randbedingung (3.11), weil die Eigenfunktionen  $v_j$  diese erfüllen, also können die Partialsummen nicht punktweise gegen  $f$  konvergieren, wenn  $f$  nicht die Randbedingung (3.11) erfüllt. Es existieren zahlreiche Aussagen, in welchem "besseren" als (3.18) Sinn die Partialsummen gegen  $f$  konvergieren, z.B.: Wenn  $f \in C^1([a, b])$  die Randbedingungen (3.11) erfüllt, so konvergiert die Reihe (3.25) gegen  $f(x)$  gleichmäßig bzgl.  $x \in [a, b]$ .

**Anwendung: Trennung der Variablen in partiellen Differentialgleichungen** Als Beispiel betrachten wir das folgende Randanfangswertproblem

$$\left. \begin{aligned} \partial_t u(x, t) - \partial_x (p(x) \partial_x u(x, t)) &= f(x, t), & a \leq x \leq b, & t \geq 0, \\ u(a, t) = u(b, t) &= 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & a \leq x \leq b, \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

das unter bestimmten Bedingungen (Vernachlässigung von zwei Raumdimensionen) die orts- und zeitabhängige Temperaturverteilung in einem dünnen Stab (mit ortsabhängigem Wärmeleitkoeffizient  $p(x) > 0$ ) beschreibt, wenn an den Stabenden die Temperatur vorgegeben ist. Die Funktionen  $f$  bzw.  $\varphi$  beschreiben eine innere Wärmequelle bzw. die Temperaturverteilung zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$ . Es seien  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$  die Eigenwerte und  $v_1, v_2, \dots$  die zugehörigen Eigenfunktionen des Eigenwertproblems

$$\begin{aligned} (p(x)v'(x))' &= \lambda v(x), & a \leq x \leq b, \\ v(a) &= v(b) = 0. \end{aligned}$$

Dann gilt für die Lösung  $u(x, t)$  von (3.26)

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \int_a^b \varphi(y) v_j(y) dy + \int_0^t e^{\lambda_j(t-s)} \int_a^b f(y, s) v_j(y) dy ds \right) v_j(x). \quad (3.27)$$

In (3.27) ist die Lösung  $u(x, t)$  von (3.26) als Reihe geschrieben, wobei die Summanden der Reihe Produkte sind und der erste Faktor nur von der Zeit  $t$  und der zweite Faktor nur vom Ort  $x$  abhängt, daher kommt der Name dieser Lösungsmethode. Wenn  $p$ ,  $\varphi$  und  $f$  hinreichend glatt sind (z.B.  $p$  stetig differenzierbar und  $\varphi$  und  $f$  stetig), dann konvergiert die Reihe in (3.27)

punktweise bzgl.  $x \in [a, b]$  und  $t > 0$  (aber im allgemeinen nicht bzgl.  $x \in [a, b]$  und  $t \geq 0$ !). Wenn  $p$ ,  $\varphi$  und  $f$  nur beschränkt und stückweise stetig sind (was in Anwendungen durchaus realistisch ist), so gilt (3.27) immer noch, allerdings ist die Konvergenz in einem schwächeren Sinn zu verstehen.

**Homogenisierung der Randbedingungen** Wenn man nicht nur die Lösungen des Randwertproblems (3.19), (3.20), das homogene Randbedingungen vorschreibt, nach den Eigenfunktionen des Eigenwertproblems (3.15), (3.16) entwickeln will, sondern auch die Lösungen des analogen Randwertproblems mit inhomogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x), \quad a \leq x \leq b, \\ \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) &= \alpha, \quad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \beta, \end{aligned} \quad (3.28)$$

so muß man zunächst die Randbedingungen folgendermaßen homogenisieren: Es sei  $u_* \in C^2([a, b])$  eine Funktion, die die inhomogenen Randbedingungen erfüllt, und  $u$  sei die Lösung von (3.28). Dann gilt für  $w := u - u_*$

$$\begin{aligned} (p(x)w'(x))' + q(x)w(x) &= f(x) + (p(x)u_*'(x))' + q(x)u_*(x), \quad a \leq x \leq b, \\ \alpha_0 w(a) + \alpha_1 w'(a) &= \beta_0 w(b) + \beta_1 w'(b) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| u(x) - u_*(x) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \int_a^b \left( f(y) + (p(x)u_*'(x))' + q(x)u_*(x) \right) v_j(y) dy v_j(x) \right|^2 dx = 0.$$

**Gleichungen in Normalform und Sturm-Liouville-Form** Gleichungen vom Typ (3.1) bzw. (3.19) heißen Gleichung in Normalform bzw. in Sturm-Liouville-Form. Wenn  $u$  eine Lösung von (3.1) ist, so ist  $u$  auch Lösung von (3.19) mit

$$p(x) = \exp \int_a^x c_1(y) dy, \quad q(x) = c_0(x) \exp \int_a^x c_1(y) dy$$

und rechter Seite  $f(x)p(x)$ . Und umgekehrt: Wenn  $u$  eine Lösung von (3.19) ist, so ist  $u$  auch Lösung von (3.1) mit

$$c_1(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}, \quad c_0(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$$

und rechter Seite  $f(x)/p(x)$ . Gleichungen in Sturm-Liouville-Form treten in Anwendungen oft auf, z.B. ist die Euler-Lagrange-Gleichung (3.4) mit

$$G(x, u, u') = \frac{1}{2} (p(x)u'^2 - q(x)u^2) + f(x)u$$

eine Gleichung in Sturm-Liouville-Form.

**Eigenwertprobleme in Normalform** Für Eigenwertprobleme in Normalform, d.h.

$$\begin{aligned} v''(x) + c_1(x)v'(x) + c_0(x)v(x) &= \lambda v(x), \quad a \leq x \leq b, \\ \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) &= \beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b) = 0, \end{aligned}$$

gelten im Prinzip die gleichen Aussagen wie für Eigenwertprobleme in Sturm-Liouville-Form. Nur die Aussage (iii) ändert sich zu

$$\int_a^b \rho(x)v_j(x)v_k(x)dx = \delta_{jk} \text{ mit } \rho(x) := \exp \int_a^x c_1(y)dy$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{j=1}^n \int_a^b \rho(y)f(y)v_j(y)dy v_j(x) \right|^2 dx = 0 \text{ für alle } f \in C([a, b]),$$

und die Aussage (v) ändert sich zu

$$\lambda_1 = \sup \left\{ \int_a^b \rho(-v'^2 + c_0v^2) dx : \int_a^b \rho v^2 dx = 1, \alpha_0v(a) + \alpha_1v'(a) = \beta_0v(b) + \beta_1v'(b) = 0 \right\}.$$

Ferner ändert sich die Aussage (iv) folgendermaßen: Es gelte  $0 \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ , und es seien  $f \in C([a, b])$  und  $u \in C^2([a, b])$  gegeben mit (3.1), (3.2). Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| u(x) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \int_a^b \rho(x)f(y)v_j(y)dy v_j(x) \right|^2 dx = 0.$$

**Periodische Randbedingungen** Für Eigenwertprobleme mit periodischen Randbedingungen, d.h.

$$\begin{aligned} (p(x)v'(x))' + q(x)v(x) &= \lambda v(x), \quad a \leq x \leq b, \\ v(a) - v(b) &= v'(a) - v'(b) = 0, \end{aligned}$$

mit  $p(a) = p(b)$  gelten im Prinzip die gleichen Aussagen wie für Eigenwertprobleme mit Robin-Randbedingungen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass zu einem Eigenwert zwei linear unabhängige Eigenfunktionen existieren können. Solche Eigenwerte muß man in der Aufzählung  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  doppelt zählen, damit die Aussagen (3.18) und (3.21) wieder gelten.

**Beispiel** Die Eigenwerte und normierten Eigenfunktionen zu

$$\begin{aligned} v''(x) &= \lambda v(x), \quad a \leq x \leq b, \\ v(a) - v(b) &= v'(a) - v'(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

sind

$$\lambda_1 = 0, \quad v_1(x) = \sqrt{\frac{1}{b-a}}$$

und

$$\lambda_{2k} = -\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2, \quad v_{2k}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{2k\pi}{b-a}(x-a), \quad k = 1, 2, \dots$$

und

$$\lambda_{2k+1} = -\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2, \quad v_{2k+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{2k\pi}{b-a}(x-a), \quad k = 1, 2, \dots$$

**Fourier-Reihen** We man eine Funktion  $f \in C([a, b])$  nach den Eigenfunktionen der Eigenwertprobleme (3.22), (3.23) und (3.29) entwickelt, so erhält man die sogenannten (klassischen) Fourier-Entwicklungen von  $f$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{b-a} \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b f(y) \sin \frac{j\pi}{b-a}(y-a) dy \sin \frac{j\pi}{b-a}(x-a) \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy + \frac{2}{b-a} \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b f(y) \cos \frac{j\pi}{b-a}(y-a) dy \cos \frac{j\pi}{b-a}(x-a) \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy + \frac{2}{b-a} \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b f(y) \sin \frac{2j\pi}{b-a}(y-a) dy \sin \frac{2j\pi}{b-a}(x-a) \\ &\quad + \frac{2}{b-a} \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b f(y) \cos \frac{2j\pi}{b-a}(y-a) dy \cos \frac{2j\pi}{b-a}(x-a) \end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren im Sinne von (3.18), sogar wenn  $f$  nur beschränkt und stückweise stetig ist. Wenn  $f$  die periodischen Randbedingungen erfüllt und stetig differenzierbar ist, so konvergieren sie sogar gleichmäßig auf  $[a, b]$ .

## 4 Elemente der Funktionalanalysis

In diesem Kapitel betrachten wir Vektorräume über  $\mathbb{R}$  bzw. über  $\mathbb{C}$ . Wenn es im gegebenen Zusammenhang keine Rolle spielt, ob der betrachtete Vektorraum reell oder komplex ist, so sprechen wir von einem Vektorraum über  $\mathbb{K}$ , ansonsten von einem Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  bzw. von einem Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### 4.1 Normierte Vektorräume

Es sei  $U$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ .

**Norm** Eine Abbildung  $\|\cdot\| : U \rightarrow [0, \infty)$  heißt Norm in  $U$ , wenn für alle  $u, v \in U$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt

$$\begin{aligned} \text{Definitheit:} \quad & \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0, \\ \text{Homogenität:} \quad & \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \\ \text{Dreiecksungleichung:} \quad & \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

Das Paar  $(U, \|\cdot\|)$  heißt dann normierter Vektorraum.

**Weitere Ungleichungen** Es sei  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $U$ , dann gilt für alle  $a, b, c, d \in U$

$$\begin{aligned} \text{Dreiecksungleichung nach unten:} \quad & \|a\| - \|b\| \leq \|a + b\|, \\ \text{Vierecksungleichung:} \quad & \|a - b\| - \|c - d\| \leq \|a - c\| + \|b - d\|. \end{aligned}$$

**Vergleich von Normen** Es seien  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|$  zwei Normen in  $U$ , und es gelte

$$\exists c > 0 \forall u \in U : \|u\| \leq c \|u\|,$$

dann nennt man  $\|\cdot\|$  stärker als  $\|\cdot\|$ . Wenn  $\|\cdot\|$  stärker als  $\|\cdot\|$  ist und gleichzeitig  $\|\cdot\|$  stärker als  $\|\cdot\|$ , so nennt man  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|$  äquivalent. Das ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Normen in  $U$ .

Im weiteren ist  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $U$ .

**Induzierte Metrik** Durch

$$\rho(u, v) := \|u - v\|$$

ist eine Metrik (die durch die Norm  $\|\cdot\|$  induzierte Metrik) in  $U$  definiert. Folglich kann man alle Begriffe, die mit metrischen Räumen verbunden sind, auch in normierten Vektorräumen einführen, insbesondere die folgenden:

**Konvergenz von Folgen** Eine Folge  $u_1, u_2, \dots \in U$  heißt konvergent bzgl.  $\|\cdot\|$ , wenn sie konvergent bzgl. der durch die Norm  $\|\cdot\|$  induzierten Metrik ist, d.h. wenn ein Vektor  $u \in U$  existiert mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N} \forall j \geq j_0 : \|u_j - u\| \leq \varepsilon.$$

Der Vektor  $u$  heißt dann Grenzwert der Folge, und man schreibt  $u = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j$ .

**Konvergenz von Reihen** Zu jeder Folge  $u_0, u_1, u_2, \dots \in U$  kann man die Folge

$$s_0 := u_0, s_1 := u_0 + u_1, s_2 := u_0 + u_1 + u_2, \dots$$

betrachten. Diese nennt man dann Reihe mit den Summanden  $u_0, u_1, u_2, \dots$  und den Partialsummen  $s_0, s_1, s_2, \dots$ , und die Reihe heißt konvergent bzgl.  $\|\cdot\|$ , wenn die Folge ihrer Partialsummen bzgl.  $\|\cdot\|$  konvergent ist. Man schreibt dann

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k u_j,$$

und dieses Element von  $U$  heißt dann Grenzwert bzgl.  $\|\cdot\|$  der Reihe.

**Fundamentalfolgen** Eine Folge  $u_1, u_2, \dots \in U$  heißt Fundamentalfolge bzgl.  $\|\cdot\|$ , wenn sie Fundamentalfolge bzgl. der durch die Norm  $\|\cdot\|$  induzierten Metrik ist, d.h. wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N} \forall j, k \geq j_0 : \|u_j - u_k\| \leq \varepsilon.$$

Jede konvergente Folge ist eine Fundamentalfolge, und jede Fundamentalfolge ist **beschränkt** bzgl.  $\|\cdot\|$ , d.h.  $\sup\{\|u_j\| : j \in \mathbb{N}\} < \infty$ .

**Vollständigkeit** Der Vektorraum  $U$  heißt vollständig bzgl.  $\|\cdot\|$ , wenn  $U$  vollständig bzgl. der durch die Norm  $\|\cdot\|$  induzierten Metrik ist, d.h. wenn jede Fundamentalfolge bzgl.  $\|\cdot\|$  konvergiert.

**Offenheit** Eine Menge  $M \subseteq U$  heißt offen bzgl.  $\|\cdot\|$ , wenn sie offen bzgl. der durch die Norm  $\|\cdot\|$  induzierten Metrik ist, d.h.

$$\forall u \in M \exists \varepsilon > 0 \forall v \in U : \|v - u\| \leq \varepsilon \Rightarrow v \in M.$$

**Abgeschlossenheit** Eine Menge  $M \subseteq U$  heißt abgeschlossen bzgl.  $\|\cdot\|$ , wenn sie abgeschlossen bzgl. der durch die Norm  $\|\cdot\|$  induzierten Metrik ist, d.h. für jede konvergente Folge  $u_1, u_2, \dots \in M$  gilt, dass ihr Grenzwert ebenfalls in  $M$  liegt.

**Abgeschlossene Hülle** Die abgeschlossene Hülle  $\overline{M}$  einer Menge  $M \subseteq U$  bzgl.  $\|\cdot\|$  ist definiert durch

$$\overline{M} := \{u \in U : \text{Es existiert eine Folge } u_1, u_2, \dots \in M \text{ mit } \lim_{j \rightarrow \infty} \|u - u_j\| = 0.\},$$

und  $\overline{M}$  ist die kleinste abgeschlossene bzgl.  $\|\cdot\|$  Untermenge von  $U$ , die  $M$  enthält.

**Dichtheit** Eine Menge  $M \subseteq U$  heißt dicht in  $U$  bzgl.  $\|\cdot\|$ , wenn  $\overline{M} = U$ .

## 4.2 Der wesentliche Unterschied: Endlichdimensional oder Unendlichdimensional?

Der Vektorraum  $U$  heißt endlich-dimensional, wenn linear unabhängige Vektoren  $u_1, \dots, u_n \in U$  existieren mit

$$U = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}.$$

Die natürliche Zahl  $n$  ist dann eindeutig bestimmt, und man schreibt  $\dim U = n$ . Wenn  $U$  nicht endlich-dimensional ist, d.h. wenn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  linear unabhängige Vektoren  $u_1, \dots, u_n \in U$  existieren, so heißt  $U$  unendlich-dimensional, und man schreibt  $\dim U = \infty$ .

**Algebraische Kriterien für Endlich-Dimensionalität** Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- (i)  $\dim U < \infty$
- (ii) Jede injektive lineare Abbildung  $U \rightarrow U$  ist surjektiv.
- (iii) Jede surjektive lineare Abbildung  $U \rightarrow U$  ist injektiv.
- (iv) Wenn  $V \subseteq U$  ein Teilraum ist und wenn eine lineare bijektive Abbildung von  $U$  auf  $V$  existiert, so gilt  $U = V$ .

**Gegenbeispiele** Es sei  $U$  der Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Dann ist die lineare Abbildung

$$A : U \rightarrow U : (Au)(x) := xu(x)$$

injektiv, aber nicht surjektiv. Sie bildet  $U$  bijektiv auf den echten Teilraum  $\{u \in U : u(0) = 0\}$  ab. Die lineare Abbildung

$$B : U \rightarrow U : Bu := u' \text{ (Ableitung)}$$

ist surjektiv, aber nicht injektiv.

**Topologische Kriterien für Endlich-Dimensionalität** Folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i)  $\dim U < \infty$
- (ii) Alle Normen auf  $U$  sind äquivalent.
- (iii) Jede bzgl. irgendeiner Norm beschränkte Folge besitzt eine bzgl. irgendeiner Norm konvergente Teilfolge.
- (iv) Jeder Teilraum von  $U$  ist bzgl. einer (und damit bzgl. jeder) Norm abgeschlossen.
- (v) Jede lineare Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{K}$  ist bzgl. einer (und damit bzgl. jeder) Norm stetig.

### 4.3 Normierte Funktionenräume

**Normierte Vektorräume stetiger Funktionen** (i) Wir bezeichnen mit  $C([a, b]; \mathbb{K})$  den Vektorraum über  $\mathbb{K}$  aller stetigen Funktionen  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ , d.h.

$$C([a, b]; \mathbb{K}) := \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \mid u \text{ ist stetig}\}. \quad (4.1)$$

In  $C([a, b]; \mathbb{K})$  betrachten wir die Normen

$$\|u\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |u(x)| \quad (4.2)$$

und

$$\|u\|_p := \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty. \quad (4.3)$$

Die Dreiecksungleichung gilt für  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p < \infty$  wegen der Minkowski-Ungleichung

$$\left( \int_a^b |u(x) + v(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

(ii) **Vergleich der Normen  $\|\cdot\|_p$ :** Für  $1 \leq p < q \leq \infty$  ist  $\|\cdot\|_q$  stärker als  $\|\cdot\|_p$ , für  $1 \leq p < q < \infty$  folgt dies aus der Hölder-Ungleichung

$$\int_a^b |u(x)v(x)| dx \leq \left( \int_a^b |u(x)|^r dx \right)^{1/r} \left( \int_a^b |v(x)|^s dx \right)^{1/s} \quad \text{mit } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

(iii) **Gleichmäßige Konvergenz und Konvergenz bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ :** Eine Folge  $u_1, u_2, \dots \in C([a, b]; \mathbb{K})$  konvergiert gegen  $u \in C([a, b]; \mathbb{K})$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  genau dann, wenn sie gleichmäßig gegen  $u$  konvergiert, d.h. wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N} \forall x \in [a, b] \forall j \geq j_0 : |u_j(x) - u(x)| \leq \varepsilon. \quad (4.4)$$

(iv) **Ein nicht abgeschlossener Teilraum:** Der Vektorraum aller Polynome mit Koeffizienten in  $\mathbb{K}$  ist ein Teilraum von  $C([a, b]; \mathbb{K})$ , er wird mit  $\mathbb{K}[x]$  bezeichnet, d.h.

$$\mathbb{K}[x] := \{u \in C([a, b]; \mathbb{K}) : u \text{ ist Polynom}\}.$$

$\mathbb{K}[x]$  ist bzgl. keiner Norm  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p \leq \infty$  abgeschlossen. Z.B konvergieren die Polynome

$$u_j \in \mathbb{K}[x] : u_j(x) := \sum_{k=0}^j \frac{x^k}{k!} \quad (4.5)$$

gleichmäßig und folglich bzgl. allen Normen  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p \leq \infty$ , aber der Grenzwert  $e^x$  ist kein Polynom.

(v) **Nicht äquivalente Normen:** Die Folge  $u_1, u_2, \dots \in C([0, 1]; \mathbb{K})$  sei definiert durch

$$u_n(x) := \begin{cases} n & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 1/x & \text{für } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|u_n\|_p = \begin{cases} n & \text{für } p = \infty, \\ \left(1 + \frac{n^{p-1} - 1}{p}\right)^{1/p} & \text{für } 1 < p < \infty, \\ 1 + \ln n & \text{für } p = 1. \end{cases}$$

Folglich gilt für  $1 \leq q < p \leq \infty$ : Es existiert kein  $c > 0$  mit  $\|u_n\|_p \leq c\|u_n\|_q$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit anderen Worten: Für  $1 \leq p \neq q \leq \infty$  ist  $\|\cdot\|_q$  nicht äquivalent zu  $\|\cdot\|_p$ .

(vi) **Eine beschränkte Folge, die keine konvergente Teilfolge besitzt:** Die Folge  $u_1, u_2, \dots \in C([-1, 1]; \mathbb{K})$  mit

$$u_j(x) := \begin{cases} -\sqrt[j]{-x} & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ -\sqrt[j]{x} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ist bzgl. jeder Norm  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p \leq \infty$  beschränkt und bzgl. jeder Norm  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p < \infty$  eine Fundamentalfolge, aber sie besitzt keine Teilfolge, die bzgl. irgendeiner Norm  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p \leq \infty$  konvergent wäre. Insbesondere ist  $C([-1, 1]; \mathbb{K})$  bzgl.  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p < \infty$  nicht vollständig. Dagegen ist  $C([-1, 1]; \mathbb{K})$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  vollständig.

(vii) **Eine unstetige lineare Abbildung:** Die Abbildung  $u \in C([0, 1]; \mathbb{K}) \mapsto u(0) \in \mathbb{K}$  ist linear und stetig bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ , aber unstetig bzgl.  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p < \infty$ . Sie heißt Dirac-Funktion oder Dirac-Funktional mit Träger in Null.

**Normierte Vektorräume integrierbarer Funktionen** Wir bezeichnen mit  $U$  den Vektorraum über  $\mathbb{K}$  aller (Riemann-)integrierbaren Funktionen  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ . In  $U$  sind die Ausdrücke (4.3) keine Normen, denn z.B. für die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = a, \\ 0 & \text{für } a < x \leq b \end{cases}$$

gilt  $u \neq 0$ , aber  $\|u\|_p = 0$ . Diesen Nachteil kann man "reparieren", indem man zu den Äquivalenzklassen bzgl. der folgenden Äquivalenzrelation  $\sim$  in  $U$  übergeht:

$$u \sim v \Leftrightarrow \int_a^b |u(x) - v(x)| dx = 0.$$

Wenn man für  $u \in U$  seine Äquivalenzklasse mit

$$[u] := \{v \in U : u \sim v\}$$

bezeichnet, so wird die Menge der Äquivalenzklassen zu einem neuen Vektorraum  $\tilde{U}$ , wenn man definiert

$$[u] + [v] := [u + v], \quad \lambda[u] := [\lambda u] \quad \text{für alle } u, v \in U, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Die Elemente von  $\tilde{U}$ , d.h. die Äquivalenzklassen  $[u]$ , werden oft mit den sie erzeugenden Funktionen  $u$  identifiziert. In manchen Zusammenhängen ist das möglich und sinnvoll, in anderen aber nicht: Insbesondere hat es im allgemeinen keinen Sinn, einer Äquivalenzklasse  $[u]$  einen "Funktionswert" in einem gegebenen Punkt  $x \in [a, b]$  zuzuordnen. Für jedes  $p \in [1, \infty)$  wird  $\tilde{U}$  zu einem normierten Vektorraum mit der Norm

$$\|[u]\|_p := \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

**Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen** Es seien  $u_1, u_2, \dots : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  eine Folge von Funktionen und  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion. Man unterscheidet die folgenden Arten von Konvergenz  $u_j \rightarrow u$ :

(i) **Punktweise Konvergenz** Man sagt, dass die Funktionenfolge  $u_j$  punktweise gegen die Funktion  $u$  konvergiert, wenn für jedes  $x \in [a, b]$  gilt  $|u_j(x) - u(x)| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , d.h.

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \quad \forall j \geq j_0 : |u_j(x) - u(x)| \leq \varepsilon. \quad (4.6)$$

(ii) **Gleichmäßige Konvergenz** Man sagt, dass die Funktionenfolge  $u_j$  gleichmäßig gegen die Funktion  $u$  konvergiert, wenn (4.4) gilt.

(iii) **Konvergenz bzgl.  $\|\cdot\|_p$**  Man sagt, dass die Funktionenfolge  $u_j$  gegen die Funktion  $u$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_p$  (mit  $1 \leq p < \infty$ ) konvergiert, wenn gilt

$$\|u_j - u\|_p = \left( \int_a^b |u_j(x) - u(x)|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty,$$

d.h. wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \quad \forall j \geq j_0 : \int_a^b |u_j(x) - u(x)|^p dx \leq \varepsilon. \quad (4.7)$$

Damit (4.4) oder (4.6) oder (4.7) gilt, müssen weder die Funktionen  $u_n$  noch die Grenzfunktion  $u$  stetig sein. Für (4.4) benötigt man nur, dass für alle  $j$  die Funktion  $x \mapsto |u_j(x) - u(x)|$  beschränkt ist, und für (4.7) benötigt man nur, dass für alle  $j$  die Funktion  $x \mapsto |u_j(x) - u(x)|^p$  integrierbar ist. Wenn allerdings alle Funktionen  $u_n$  stetig sind, so entsteht die Frage, ob dann auch  $u$  stetig ist. Bei (4.4) ist die Antwort ja, bei (4.6) und (4.7) im Allgemeinen nein.

Wenn man bei der Konvergenz bzgl.  $\|\cdot\|_p$  (mit  $1 \leq p < \infty$ ) auch unstetige Grenzfunktionen  $u$  zulässt, so ist die Grenzfunktion nicht eindeutig bestimmt, denn es gilt  $\|u_j - u\|_p = \|u_j - \tilde{u}\|_p$  für alle Funktionen  $\tilde{u} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, dass die Menge  $\{x \in [a, b] : u(x) \neq \tilde{u}(x)\}$  eine Nullmenge ist. Mit anderen Worten: Wenn man bei der Konvergenz bzgl.  $\|\cdot\|_p$  (mit  $1 \leq p < \infty$ ) eine eindeutige Grenzfunktion haben will, so muß man die Grenzfunktion als Äquivalenzklasse bzgl. der oben beschriebenen Äquivalenzrelation  $\sim$  verstehen.

(iv) **Verhältnis der Konvergenzbegriffe** Wenn  $u_j$  gleichmäßig gegen  $u$  konvergiert, so konvergiert  $u_n$  auch punktweise und bzgl. jeder Norm  $\|\cdot\|_p$  gegen  $u$ , und  $u$  ist dann auch stetig. Wenn  $u_j$  gegen  $u$  konvergiert bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_p$ , so konvergiert  $u_j$  gegen  $u$  auch bzgl. aller Normen  $\|\cdot\|_q$  mit  $1 \leq q \leq p$ .

(v) **Gegenbeispiele mit  $a = 0, b = 1$**  Die Funktionenfolge

$$u_j(x) = x^j - x^{2j}$$

konvergiert gegen die Nullfunktion punktweise und bzgl. aller Normen  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p < \infty$ , aber sie konvergiert nicht gleichmäßig. Die Funktionenfolge

$$u_j(x) = j^2 (x^j - x^{2j})$$

konvergiert gegen die Nullfunktion punktweise, aber sie konvergiert nicht bzgl. irgendeiner Norm  $\|\cdot\|_q$  mit  $1 \leq q \leq \infty$ . Die Funktionenfolge

$$u_j(x) = \sqrt{j} e^{-jx}$$

konvergiert gegen die Nullfunktion bzgl.  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p < 2$ , aber sie konvergiert nicht punktweise und auch nicht bzgl. irgendeiner Norm  $\|\cdot\|_p$  mit  $2 \leq q \leq \infty$ .

#### 4.4 Vektorräume mit Skalarprodukt. Hilbert-Räume

Es sei  $U$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Eine Abbildung  $(u, v) \in U^2 \mapsto \langle u, v \rangle \in \mathbb{K}$  heißt **Skalarprodukt** auf  $U$ , wenn für alle  $u, v, w \in U$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{Definitheit:} & \quad \langle u, u \rangle \|u\| \geq 0, \quad \text{und} \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0, \\ \text{Symmetrie:} & \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \\ \text{Bilinearität:} & \quad \langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Das Paar  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt dann Vektorraum mit Skalarprodukt oder Prä-Hilbert-Raum. Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  nennt man  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  auch Euklidischer Vektorraum und im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  unitärer Vektorraum.

**Skalarprodukt und induzierte Norm** Wenn  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt ist, so ist

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

eine Norm auf  $U$ , die durch das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierte Norm, und es gilt für alle  $u, v \in U$

$$\begin{aligned} \text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung:} & \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \\ \text{binomische Formel:} & \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2, \\ \text{Satz des Pythagoras:} & \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2, \quad \text{wenn} \quad \langle u, v \rangle = 0, \\ \text{Parallelogramm-Gleichung:} & \quad \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \end{aligned}$$

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt wird stets als normierter Vektorraum mit der induzierten Norm und damit als metrischer Raum mit der induzierten Metrik betrachtet. Alle Begriffe, die mit metrischen Räumen verbunden sind, werden deshalb auch in Vektorräumen mit Skalarprodukt benutzt, wobei stets die durch das Skalarprodukt induzierte Metrik gemeint ist. Ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt heißt **Hilbert-Raum**.

**Beispiel** Die Norm  $\|\cdot\|_2$  in  $C([a, b]; \mathbb{K})$  ist durch ein Skalarprodukt induziert, nämlich durch

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx. \quad (4.8)$$

Dieser Vektorraum mit Skalarprodukt ist allerdings nicht vollständig. Die durch das Skalarprodukt (4.8) induzierte Norm ist die Norm (4.3) mit  $p = 2$ .

**Orthogonales Komplement, orthogonaler Projektor und senkrecht Lot** Es seien  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt und  $V \subset U$  ein Teilraum, der bzgl. der induzierten Norm  $\|\cdot\|$  vollständig ist (z.B.  $\dim V < \infty$ , oder  $U$  ist vollständig und  $V$  ist abgeschlossen). Dann existiert für jedes  $u \in U$  genau ein  $v \in V$  mit folgenden zwei äquivalenten Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \langle u - v, w \rangle &= 0 \quad \text{für alle} \quad w \in V, \\ \|u - v\| &\leq \|u - w\| \quad \text{für alle} \quad w \in V. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $u \in U \mapsto v \in V$  heißt orthogonale Projektion von  $U$  auf  $V$ . Der Vektor  $u - v$  heißt senkrecht Lot von  $u$  auf den Teilraum  $V$ , und  $\|u - v\|$  heißt Abstand von  $u$  zu dem Teilraum  $V$ . Die Menge

$$V^\perp := \{u \in U : \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\}$$

heißt orthogonales Komplement zu  $V$  und ist ein abgeschlossener Teilraum in  $U$ , und es gilt

$$U = V \oplus V^\perp.$$

**Ein Algorithmus zur Berechnung der orthogonalen Projektion** Es seien  $e_1, \dots, e_n \in U$  mit  $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$  und  $u \in U$  gegeben. Dann ist  $\sum_{j=1}^n \langle u, e_j \rangle e_j$  die orthogonale Projektion von  $u$  auf  $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ .

**Beispiel** Wir betrachten den Vektorraum  $C([a, b]; \mathbb{K})$  mit dem Skalarprodukt (4.8). Dann besitzt die Funktion  $u \in C([a, b]; \mathbb{K})$ ,  $u(x) := e^x$ , keine orthogonale Projektion auf den Teilraum  $\mathbb{K}[x]$ , weil die Folge (4.5) von Polynomen gegen  $u$  konvergiert, d.h.

$$\inf_{w \in \mathbb{K}[x]} \|u - w\|_2 = 0,$$

aber  $u \notin \mathbb{K}[x]$ .

## 4.5 Orthonormalbasen

In diesem Unterkapitel ist  $U$  ein unendlich-dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und induzierter Norm  $\|\cdot\|$ .

**Satz und Definition** Es sei  $e_1, e_2, \dots \in U$  eine Folge von Vektoren mit  $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ . Dann heißt diese Folge Orthonormalbasis in  $U$ , wenn eine (und folglich alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j \rangle e_j$  für alle  $u \in U$ .
- (ii)  $\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, e_j \rangle|^2$  für alle  $u \in U$  (Parsevalsche Gleichung).
- (iii)  $\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j \rangle \langle e_j, v \rangle$  für alle  $u, v \in U$ .
- (iv)  $\overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}} = U$ .

Dabei ist  $\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}$  die Teilraum aller Linearkombinationen von endlich vielen Elementen der Menge  $\{e_1, e_2, \dots\}$ , und  $\overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}}$  ist die Abschließung bzgl.  $\|\cdot\|$  dieses Teilraums, d.h. die Menge aller Grenzwerte bzgl.  $\|\cdot\|$  von Folgen aus diesem Teilraum.

**Schmidt-Orthonormierungsverfahren** Es sei  $v_1, v_2, \dots \in U$  eine Folge von Vektoren mit  $\dim \text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = n$  und

$$\overline{\text{span}\{v_1, v_2, \dots\}} = U. \quad (4.9)$$

Dann kann man induktiv eine Orthonormalbasis  $e_1, e_2, \dots$  in  $U$  konstruieren durch

$$e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad e_{n+1} := \frac{v_{n+1} - \sum_{j=1}^n \langle v_{n+1}, e_j \rangle e_j}{\|v_{n+1} - \sum_{j=1}^n \langle v_{n+1}, e_j \rangle e_j\|}.$$

Dabei gilt  $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ .

In Anwendungen besteht die Hauptarbeit darin, die Bedingung (4.9) zu überprüfen. Im Fall  $U = C([a, b]; \mathbb{K})$  hilft dabei der folgende Satz:

**Satz von Stone-Weierstraß** Es sei  $v_1, v_2, \dots \in C([a, b], \mathbb{K})$  eine Folge von Funktionen mit

- $1 \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots\}$ ,
- $v_j v_k \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots\}$  für alle  $j, k \in \mathbb{N}$  ( $v_j v_k$  ist das punktweise Produkt von  $v_j$  und  $v_k$ ),
- für alle  $a \leq x < y \leq b$  existiert ein  $j \in \mathbb{N}$  mit  $v_j(x) \neq v_j(y)$ .

Dann gilt

$$\overline{\text{span}\{v_1, v_2, \dots\}} = C([a, b], \mathbb{K}),$$

wobei die Abschließung im Sinne der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  (und folglich im Sinne jeder Norm  $\|\cdot\|_p$  mit  $1 \leq p \leq \infty$ ) zu verstehen ist. Zum Beispiel besitzt die Funktionenfolge  $1, x, x^2, \dots$  die obigen drei Eigenschaften. Mit anderen Worten: Die Menge der Polynome ist dicht bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  in  $C([a, b]; \mathbb{K})$ .

**Beispiel** Wenn man in  $C([-1, 1]; \mathbb{R})$  die Polynome  $1, x, x^2, x^3, \dots$  bzgl. dem Skalarprodukt (4.8) nach dem Schmidt-Verfahren orthonormiert, so erhält man eine Orthonormalbasis bestehend aus den sogenannten Legendre-Polynomen

$$e_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad e_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad e_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \dots$$

**Beispiele** (i) In  $C([a, b]; \mathbb{R})$  mit dem Skalarprodukt (4.8) sind die folgenden Systeme Orthonormalbasen:

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(\frac{j\pi}{b-a}(x-a)\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

bzw.

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{j\pi}{b-a}(x-a)\right), \quad j = 1, 2, \dots,$$

bzw.

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{2j\pi}{b-a}(x-a)\right), \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(\frac{2j\pi}{b-a}(x-a)\right) \quad j = 1, 2, \dots$$

(ii) In  $C([a, b]; \mathbb{C})$  mit dem Skalarprodukt (4.8) ist das folgende System eine Orthonormalbasis:

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}} \exp\left(i \frac{2j\pi}{b-a}(x-a)\right), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

## 4.6 Lineare beschränkte Operatoren

Es seien  $(U, \|\cdot\|_U)$  und  $(V, \|\cdot\|_V)$  zwei normierte Vektorräume über  $\mathbb{K}$ . Eine lineare Abbildung  $A : U \rightarrow V$  heißt linearer beschränkter Operator, wenn eine (und folglich alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $A$  ist stetig in einem Punkt.
- (ii)  $A$  ist stetig.
- (iii) Es existiert ein  $c > 0$  so dass für alle  $u \in U$  gilt  $\|Au\|_V \leq c\|u\|_U$ .

Die Menge aller linearer beschränkter Operatoren von  $U$  nach  $V$  ist ihrerseits ein normierter Vektorraum mit den algebraischen Operationen

$$(A + B)u := Au + Bu, (\lambda A)u := \lambda Au$$

und der durch die Normen  $\|\cdot\|_U$  und  $\|\cdot\|_V$  induzierten sogenannten **Operator-Norm**

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sup_{\|u\|_U \leq 1} \|Au\|_V = \sup_{\|u\|_U = 1} \|Au\|_V = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_V}{\|u\|_U} \\ &= \inf\{c > 0 : \|Au\|_V \leq c\|u\|_U \text{ für alle } u \in U\}. \end{aligned}$$

Für diese Norm gilt

$$\|Au\|_V \leq \|A\|\|u\|_U \text{ für alle } u \in U.$$

Wenn  $U = V$  ist, so gilt für alle linearen beschränkten Operatoren  $A, B : U \rightarrow U$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

**Beispiel: Matrizen** Wenn  $U = \mathbb{R}^n$  und  $V = \mathbb{R}^m$  ist, so ist jede lineare Abbildung  $A : U \rightarrow V$  beschränkt, und man kann  $A$  mit einer reellen  $m \times n$ -Matrix  $[a_{jk}]$  identifizieren nach der Regel

$$A \left( \sum_{k=1}^n u_k e_k \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} u_k e_j.$$

Dabei sind  $e_j$  die Standard-Basisvektoren in  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

(i) Wenn in  $U = \mathbb{R}^n$  bzw.  $V = \mathbb{R}^m$  die Normen  $\|u\|_U = \sum_{j=1}^n |u_j|$  bzw.  $\|v\|_V = \sum_{j=1}^m |v_j|$  gewählt werden, so folgt

$$\|A\| = \max_{k=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |a_{jk}|.$$

(ii) Wenn in  $U = \mathbb{R}^n$  bzw.  $V = \mathbb{R}^m$  die Normen  $\|u\|_U = \max_{j=1, \dots, n} |u_j|$  bzw.  $\|v\|_V = \max_{j=1, \dots, m} |v_j|$  gewählt werden, so folgt

$$\|A\| = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|. \quad (4.10)$$

(iii) Wenn in  $U = \mathbb{R}^n$  bzw.  $V = \mathbb{R}^m$  die Normen  $\|u\|_U^2 = \sum_{j=1}^n |u_j|^2$  bzw.  $\|v\|_V^2 = \sum_{j=1}^m |v_j|^2$  gewählt werden, so folgt

$$\|A\|^2 \leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2.$$

**Beispiel: Ein Differentialoperator** Für  $k = 1, 2, \dots$  bezeichnen wir den Vektorraum (über  $\mathbb{R}$ )

$$C^k([a, b]) := \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ ist } k\text{-fach stetig differenzierbar}\} \quad (4.11)$$

mit der Norm

$$\|u\|_k := \sum_{j=0}^k \max_{a \leq x \leq b} |u^{(j)}(x)|. \quad (4.12)$$

Dann ist die lineare Abbildung

$$A : C^k([a, b]) \rightarrow C^{k-1}([a, b]) : Au := u' \text{ (Ableitung).}$$

beschränkt, und  $\|A\| = 1$ .

**Beispiel: Integraloperatoren** Es sei  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist die lineare Abbildung

$$A : C([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{R}) : (Au)(x) := \int_a^b K(x, y)u(y)dy.$$

beschränkt bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  (vgl. (4.1) und (4.2)), und es gilt

$$\|A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} \int_a^b |K(x, y)|dy.$$

Das ist ein Analogon zur Formel (4.10).

**Neumann-Reihe** Wenn  $U$  vollständig ist und  $A : U \rightarrow U$  ein linearer beschränkter Operator mit  $\|A\| < 1$ , so ist  $I - A$  bijektiv,  $(I - A)^{-1}$  ist ebenfalls ein linearer beschränkter Operator, und

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j,$$

wobei die Reihe im Sinn der Operator-Norm konvergiert. Mit anderen Worten: Die Gleichung  $u - Au = f$  besitzt für jedes  $f \in U$  eine eindeutige Lösung  $u \in U$ , und diese ist der Grenzwert der Folge

$$u_n := \sum_{j=0}^n A^j f.$$

**Lemma von Lax-Milgram** Wenn  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein vollständiger Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  mit Skalarprodukt ist,  $A : U \rightarrow U$  ein linearer beschränkter Operator und  $m > 0$  mit

$$\langle Au, u \rangle \geq m\|u\|^2 \text{ für alle } u \in U$$

( $A$  heißt dann positiv definit), so ist  $A$  bijektiv,  $A^{-1}$  ist ebenfalls ein linearer beschränkter Operator, und für jedes  $f \in U$  ist die Lösung der Gleichung  $Au = f$  der Grenzwert der induktiv definierten Folge

$$u_0 \in U \text{ beliebig, } u_{n+1} := u_n - \frac{m}{\|A\|^2}(Au_n - f). \quad (4.13)$$

#### 4.7 Dualraum. Verallgemeinerte Funktionen und verallgemeinerte Ableitungen

Es sei  $(U, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum, der Einfachheit halber über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Dann nennt man den Vektorraum aller linearen beschränkten Abbildungen  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Norm

$$\|\varphi\|_* := \sup_{\|u\| \leq 1} |\varphi(u)|$$

Dualraum zu  $U$  und bezeichnet ihn mit  $U^*$ . Die Elemente von  $U^*$  werden (lineare beschränkte) Funktionale oder Kovektoren auf  $U$  genannt. Der Dualraum  $U^*$  ist stets vollständig, unabhängig davon, ob  $U$  vollständig ist oder nicht.

**Dualräume von Vektorräumen mit Skalarprodukt** Es sei  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt über  $\mathbb{R}$ . Dann kann man jedem Vektor  $v \in U$  das Funktional

$$\varphi_v \in U^* : \varphi_v(u) := \langle u, v \rangle \text{ für alle } u \in U \quad (4.14)$$

zuordnen. Die sogenannte Riesz-Abbildung  $v \in U \mapsto \varphi_v \in U^*$  ist linear, normerhaltend (d.h.  $\|\varphi_v\|_* = \|v\|$ ) und injektiv, deshalb identifiziert man den Vektor  $v \in U$  mit dem Funktional  $\varphi_v \in U^*$ .

**Satz von Riesz** Wenn  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt über  $\mathbb{R}$  ist, so ist die Riesz-Abbildung surjektiv, d.h. man kann jedes Funktional  $\varphi \in U^*$  mit einem Vektor  $v \in U$  identifizieren.

**Verallgemeinerte Funktionen** Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  betrachten wir den Vektorraum

$$C_o^k([a, b]) := \{u \in C^k([a, b]) : u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0 \text{ für alle } j = 0, 1, \dots, k\}$$

mit der Norm (4.12), und  $C_o^k([a, b])^*$  sei der entsprechende Dualraum. Die Einschränkung einer linearen stetigen (in Sinne von  $\|\cdot\|_k$ ) Abbildung  $\varphi : C_o^k([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $C_o^{k+l}([a, b])$  (mit  $l \in \mathbb{N}$ ) ist stetig in Sinne von  $\|\cdot\|_{k+l}$ , also

$$\varphi|_{C_o^{k+l}([a, b])} \in C_o^{k+l}([a, b])^* \text{ für alle } \varphi \in C_o^k([a, b])^*.$$

Dabei gilt:

$$\varphi \in C_o^k([a, b])^* \mapsto \varphi|_{C_o^{k+l}([a, b])} \in C_o^{k+l}([a, b])^* \text{ ist injektiv.} \quad (4.15)$$

Also kann man  $C_o^k([a, b])^*$  als Teilraum von  $C_o^{k+l}([a, b])^*$  auffassen. Mit anderen Worten, es gilt

$$C^{k+l}([a, b]) \subset C^k([a, b]) \text{ und } C_o^k([a, b])^* \subset C_o^{k+l}([a, b])^*. \quad (4.16)$$

Die Elemente der Vereinigung

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} C_o^k([a, b])^*$$

heißen **verallgemeinerte Funktionen** oder **Distributionen** auf  $[a, b]$ . Eine prominente verallgemeinerte Funktion ist das sogenannte **Dirac-Funktional** (auch Dirac-Funktion genannt) mit Träger in  $\xi \in [a, b]$ ,

$$\delta_\xi \in C_o^0([a, b])^* : \delta_\xi(u) := u(\xi) \text{ für alle } u \in C_o^0([a, b]).$$

**Funktionen als verallgemeinerte Funktionen** Es sei  $\mathcal{R}([a, b])$  der Vektorraum aller integrierbaren Funktionen  $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeder Funktion  $v \in \mathcal{R}([a, b])$  kann man eine verallgemeinerte Funktion  $\varphi_v(u) \in C_o^0([a, b])^*$  zuordnen nach der Regel

$$\varphi_v(u) := \int_a^b u(x)v(x)dx \text{ für alle } u \in C_o^0([a, b]). \quad (4.17)$$

Diese Definition ist ein Analogon der Definition (4.14). In diesem Sinne kann man  $\mathcal{R}([a, b])$  als Untermenge von  $C_o^0([a, b])^*$  auffassen, und aus (4.16) erhält man die folgende Kette von ineinandergeschachtelten Vektorräumen:

$$\dots C^2([a, b]) \subset C^1([a, b]) \subset C^0([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b]) \subset C_o^0([a, b])^* \subset C_o^1([a, b])^* \subset C_o^2([a, b])^* \dots,$$

wobei jeder Vektorraum echt kleiner ist als sein rechter Nachbar. Z.B. ist das Dirac-Funktional  $\delta_\xi \in C_o^0([a, b])^*$  nicht erzeugbar (in Sinne von (4.17)) durch eine Funktion  $v \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Mit anderen Worten: Funktionen kann man als verallgemeinerte Funktionen auffassen, aber nicht jede verallgemeinerte Funktion kann man als Funktion auffassen. Insbesondere existieren Eigenschaften, die alle Funktionen besitzen, aber nicht alle verallgemeinerten Funktionen, z.B. kann man einer verallgemeinerten Funktion im allgemeinen keinen Wert in einem Punkt  $x \in [a, b]$  zuweisen.

**Verallgemeinerte Ableitungen** Für eine verallgemeinerte Funktion  $\varphi \in C_o^k([a, b])^*$  definiert man ihre verallgemeinerte Ableitung  $\varphi' \in C_o^{k+1}([a, b])^*$  folgendermaßen:

$$\varphi'(u) := -\varphi(u') \text{ für alle } u \in C_o^{k+1}([a, b]).$$

Höhere verallgemeinerte Ableitungen definiert man dann wie höhere klassische Ableitungen:

$$\varphi^{(l+1)} := (\varphi^{(l)})'.$$

Z.B. arbeitet die  $l$ -te verallgemeinerte Ableitung  $\delta_\xi^{(l)} \in C_o^l([a, b])^*$  des Dirac-Funktionals  $\delta_\xi \in C_o^0([a, b])^*$  folgendermaßen:

$$\delta_\xi^{(l)}(u) = (-1)^l u^{(l)}(\xi) \text{ für alle } u \in C_o^l([a, b]).$$

Die verallgemeinerte Ableitung ist in folgendem Sinn eine Verallgemeinerung des klassischen Ableitungsbegriffs: Wenn  $\varphi$  durch eine Funktion  $v \in C^1([a, b])$  erzeugt ist (in Sinne von (4.17)), dann gilt

$$\varphi'_v(u) = -\varphi_v(u') = -\int_a^b u'v dx = \int_a^b uv' dx = \varphi_{v'}(u), \text{ also } \varphi'_v = \varphi_{v'},$$

d.h. die klassische Ableitung einer Funktion erzeugt die verallgemeinerte Ableitung der entsprechenden verallgemeinerten Funktion. In diesem Sinne besitzen alle verallgemeinerten Funktionen, insbesondere aber auch alle integrierbaren oder stetigen Funktionen (die im allgemeinen keine klassischen Ableitungen besitzen) verallgemeinerte Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Z.B. ist das Dirac-Funktional  $\delta_\xi$  die verallgemeinerte Ableitung der verallgemeinerten Funktion, die durch die **Heaviside-Funktion**  $H_\xi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$H_\xi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } a \leq x \leq \xi, \\ 1 & \text{für } \xi < x \leq b, \end{cases}$$

erzeugt wird, d.h.  $\varphi'_{H_\xi} = \delta_\xi$ , d.h.

$$\varphi'_{H_\xi}(u) = \delta_\xi(u) \text{ für alle } u \in C_o^0([a, b]). \quad (4.18)$$

Um (4.18) zu zeigen genügt es wegen (4.15) zu zeigen dass  $\varphi'_{H_\xi}(u) = \delta_\xi(u)$  für alle  $u \in C^1_o([a, b])$  gilt, und das folgt wegen

$$\varphi'_{H_\xi}(u) = -\varphi_{H_\xi}(u') = -\int_a^b u'(x)H_\xi(x)dx = -\int_\xi^b u'(x)dx = u(\xi) = \delta_\xi(u).$$

In diesem Sinne bezeichnet man bisweilen  $H_\xi$  als Stammfunktion von  $\delta_\xi$ . Wegen

$$H_\xi(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x - \xi) + 1)$$

ist auch  $x \mapsto S_\xi(x) := \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x - \xi)$  eine Stammfunktion von  $\delta_\xi$ , dabei ist

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

die **Signum-Funktion**. Die verallgemeinerte Funktion, die durch die “Signum-artige” Funktion  $S_\xi$  erzeugt wird, ist ihrerseits die verallgemeinerte Ableitung einer verallgemeinerten Funktion, die durch eine integrierbare, aber nicht differenzierbare Funktion erzeugt ist:

$$\varphi_{S_\xi} = \varphi'_{B_\xi} \text{ mit } B_\xi(x) := \frac{1}{2}|x - \xi|.$$

Deshalb sagt man bisweilen, dass das Dirac-Funktional  $\delta_\xi$  die zweite Ableitung der “Betragsartigen” Funktion  $B_\xi$  ist.

**Produkte von Funktionen und verallgemeinerten Funktionen** Für  $\alpha \in C^k([a, b])$  und  $\varphi \in C^k_o([a, b])^*$  definiert man das Produkt  $\alpha \cdot \varphi \in C^k_o([a, b])^*$  folgendermaßen:

$$(\alpha \cdot \varphi)(u) := \varphi(\alpha u) \text{ für alle } u \in C^k_o([a, b]).$$

Wenn  $\varphi$  durch eine Funktion  $v \in \mathcal{R}([a, b])$  erzeugt ist (in Sinne von (4.17)), dann gilt

$$(\alpha \cdot \varphi_v)(u) = \varphi_v(\alpha u) = \int_a^b v(x)\alpha(x)u(x)dx = \varphi_{\alpha v}(u), \text{ also } \alpha \cdot \varphi_v = \varphi_{\alpha v}.$$

Z.B. gilt  $(\alpha \cdot \delta_\xi)(u) = \alpha(\xi)u(\xi)$ , insbesondere folgt  $\alpha \cdot \delta_\xi = 0$  aus  $\alpha(\xi) = 0$ .

**Produktregel** Für  $\alpha \in C^k([a, b])$ ,  $\varphi \in C^k_o([a, b])^*$  und  $u \in C^{k+1}_o([a, b])$  gilt

$$(\alpha \cdot \varphi)'(u) = -(\alpha \cdot \varphi)(u') = -\varphi(\alpha u') = -\varphi((\alpha u)' - \alpha' u) = (\alpha \cdot \varphi' + \alpha' \cdot \varphi)(u),$$

also

$$(\alpha \cdot \varphi)' = \alpha \cdot \varphi' + \alpha' \cdot \varphi.$$

**Superpositionen von Funktionen und verallgemeinerten Funktionen** Es sei eine “Koordinatentransformation”  $\phi \in C^{k+1}([a, b])$  mit

$$\phi(a) = a, \phi(b) = b, \phi'(x) > 0 \text{ für alle } x \in [a, b] \tag{4.19}$$

gegeben. Dann definiert man für  $\varphi \in C_o^k([a, b])^*$  die Superposition  $\varphi \circ \phi \in C_o^k([a, b])^*$  folgendermaßen:

$$(\varphi \circ \phi)(u) := \varphi \left( \frac{u \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}} \right) \text{ für alle } u \in C_o^k([a, b]). \quad (4.20)$$

Wenn  $\varphi$  durch eine Funktion  $v \in \mathcal{R}([a, b])$  erzeugt ist (in Sinne von (4.17)), dann gilt

$$(\varphi_v \circ \phi)(u) = \varphi_v \left( \frac{u \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}} \right) = \int_a^b v(x) \frac{u(\phi^{-1}(x))}{\phi'(\phi^{-1}(x))} dx = \int_a^b v(\phi(y)) u(y) dy = \varphi_{v \circ \phi}(u),$$

also

$$\varphi_v \circ \phi = \varphi_{v \circ \phi}.$$

Z.B. gilt

$$(\delta_\xi \circ \phi)(u) = \frac{u(\phi^{-1}(\xi))}{\phi'(\phi^{-1}(\xi))}.$$

**Distributionsgesetz** Es sei  $\alpha \in C^k([a, b])$ ,  $\phi \in C^{k+1}([a, b])$ ,  $\varphi \in C_o^k([a, b])^*$  und  $u \in C_o^{k+1}([a, b])$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} ((\alpha \cdot \varphi) \circ \phi)(u) &= (\alpha \cdot \varphi) \left( \frac{u \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}} \right) = \varphi \left( \alpha \cdot \frac{u \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}} \right) = \varphi \left( \frac{((\alpha \circ \phi) \cdot u) \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}} \right) \\ &= (\varphi \circ \phi)((\alpha \circ \phi) \cdot u) = ((\alpha \circ \phi) \cdot (\varphi \circ \phi))(u), \end{aligned}$$

also

$$(\alpha \cdot \varphi) \circ \phi = (\alpha \circ \phi) \cdot (\varphi \circ \phi).$$

Dabei ist  $\alpha \circ \phi$  die klassische Superposition zweier Funktionen, und  $\varphi \circ \phi$  ist die Superposition einer verallgemeinerten Funktion und einer Funktion im Sinne von (4.20).

**Kettenregel** Für  $\phi \in C^{k+1}([a, b])$  mit (4.19),  $\varphi \in C_o^k([a, b])^*$  und  $u \in C_o^{k+1}([a, b])$  gilt

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \phi)'(u) &= -(\varphi \circ \phi)(u') = -\varphi \left( \frac{u' \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}} \right) = -\varphi((u \circ \phi^{-1})') = \varphi'(u \circ \phi^{-1}) \\ &= ((\phi' \circ \phi^{-1}) \cdot \varphi') \left( \frac{u \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}} \right) = (((\phi' \circ \phi^{-1}) \cdot \varphi') \circ \phi)(u) = (\phi' \cdot (\varphi' \circ \phi))(u), \end{aligned}$$

also

$$(\varphi \circ \phi)' = \phi' \cdot (\varphi' \circ \phi).$$

**Approximation des Dirac-Funktional durch Funktionen** Es sei  $v_1, v_2, \dots \in C([-1, 1])$  eine Funktionenfolge mit

$$v_j(x) \geq 0 \text{ für } |x| \leq \frac{1}{j}, \quad v_j(x) = 0 \text{ für } |x| \geq \frac{1}{j}, \quad \int_{-1}^1 v_j(x) dx = 1.$$

Dann konvergieren die zu  $v_j$  entsprechend (4.17) gehörenden Funktionale  $\varphi_{v_j}$  gegen das Dirac-Funktional  $\delta_0$  in dem folgenden schwachen Sinn:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{v_j}(u) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b u(x) v_j(x) dx = \delta_0(u) = u(0) \text{ für alle } u \in C_o^0([-1, 1]).$$

Allerdings konvergiert die Folge  $\varphi_{v_j}$  nicht im Sinn der Norm auch nur eines der dualen Räume  $C_o^k([-1, 1])!$

**Greensche Funktionen als verallgemeinerte Lösungen von Randwertproblemen** Es sei eine stetige Funktion  $c_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, und  $u_1, u_2$  sei ein Fundamentalsystem von der linearen homogenen Differentialgleichung  $u'' + c_0 u = 0$ . Dann gilt  $(u_1 u_2' - u_1' u_2)' = 0$ , d.h. die Wronski-Determinante von  $u_1$  und  $u_2$  ist konstant:

$$u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) =: W_0 \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Ferner ist  $W_0 \neq 0$ , weil  $u_1$  und  $u_2$  linear unabhängig sind. Wenn außerdem

$$u_1(a) = u_2(b) = 0 \tag{4.21}$$

gilt, so existiert für jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  genau eine Lösung des Randwertproblems

$$u''(x) + c_0(x)u(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \tag{4.22}$$

$$u(a) = u(b) = 0, \tag{4.23}$$

und diese Lösung kann mit Hilfe der Greenschen Funktion

$$G(x, y) := \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(y)}{W_0} & \text{für } a \leq x \leq y \leq b, \\ \frac{u_1(y)u_2(x)}{W_0} & \text{für } a \leq y \leq x \leq b \end{cases} \tag{4.24}$$

dargestellt werden:

$$u(x) = \int_a^b G(x, y)f(y)dy.$$

Wegen (4.21) erfüllt für alle  $x \in [a, b]$  die Funktion  $G(x, \cdot)$  die Randbedingungen (4.23), sie erfüllt sogar in gewissem Sinn die Differentialgleichung (4.22) mit  $f = \delta_x$ , es gilt nämlich

$$\varphi_{G(x, \cdot)}'' + c_0 \varphi_{G(x, \cdot)} = \delta_x. \tag{4.25}$$

Um die Gleichung (4.25) zu überprüfen, muß man zeigen dass für alle  $u \in C_o^0([a, b])$  gilt

$$\left( \varphi_{G(x, \cdot)}'' + c_0 \varphi_{G(x, \cdot)} \right) (u) = \delta_x(u). \tag{4.26}$$

Wegen (4.15) ist es hinreichend, (4.26) für alle  $u \in C_o^2([a, b])$  zu zeigen. Für  $u \in C_o^2([a, b])$  ist die linke Seite von (4.26) gleich

$$\begin{aligned} \varphi_{G(x, \cdot)}(u'' + c_0 u) &= \int_a^b G(x, y)(u''(y) + c_0(y)u(y))dy \\ &= \frac{1}{W_0} \left( u_2(x) \int_a^x u_1(y)(u''(y) + c_0(y)u(y))dy + u_1(x) \int_x^b u_2(y)(u''(y) + c_0(y)u(y))dy \right). \end{aligned}$$

Wegen (4.21) und  $u(a) = u(b) = 0$  ist das gleich

$$\begin{aligned} &\frac{1}{W_0} \left( u_2(x) \int_a^x u(u_1'' + c_0 u_1)dy + u_1(x) \int_x^b u(u_2'' + c_0 u_2)dy + u(x) (u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)) \right) \\ &= u(x), \end{aligned}$$

also (4.26) ist richtig. In diesem Sinn sagt man, dass  $G(x, \cdot)$  die Lösung von (4.22),(4.23) mit  $f = \delta_x$  ist, und diese Aussage kann man auch auf partielle Differentialgleichungen verallgemeinern. Dagegen besitzt die Definition (4.24) im Kontext von partiellen Differentialgleichungen kein Analogon.

## 4.8 Vervollständigung

**Vervollständigung normierter Vektorräume** Es sei  $(U, \|\cdot\|_U)$  ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Dann existieren ein vollständiger normierter Vektorraum  $(V, \|\cdot\|_V)$  über  $\mathbb{K}$  und eine injektive lineare Abbildung  $E : U \rightarrow V$  mit folgenden Eigenschaften:

(i)  $\|Eu\|_V = \|u\|_U$  für alle  $u \in U$ .

(ii) Für jedes  $v \in V$  existiert eine Folge  $u_1, u_2, \dots \in U$  mit  $\|Eu_j - v\|_V \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ .

Der normierte Vektorraum  $(V, \|\cdot\|_V)$  heißt Vervollständigung von  $(U, \|\cdot\|_U)$ , und  $E$  heißt dichte Einbettung von  $U$  in seine Vervollständigung  $V$ . Man identifiziert dann  $u \in U$  mit  $Eu \in V$ , betrachtet also  $U$  als Teilraum von seiner Vervollständigung  $V$ .

Wenn  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  zwei Vervollständigungen von  $(U, \|\cdot\|_U)$  sind, so existiert eine lineare bijektive Abbildung  $A : V \rightarrow W$  mit  $\|Av\|_W = \|v\|_V$  für alle  $v \in V$ . Deshalb unterscheidet man im allgemeinen nicht zwischen verschiedenen Vervollständigungen und spricht dann auch von “der” Vervollständigung von  $(U, \|\cdot\|_U)$ .

**Vervollständigung von Vektorräumen mit Skalarprodukt** Es sei  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle_U)$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit Skalarprodukt und Norm  $\|u\|_U = \sqrt{\langle u, u \rangle_U}$ , und  $(V, \|\cdot\|_V)$  sei eine Vervollständigung mit Einbettung  $E : U \rightarrow V$ . Dann kann man in  $V$  ein Skalarprodukt definieren durch

$$\langle u, v \rangle_V := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v_n \rangle_U \text{ mit } u_n, v_n \in U \text{ so dass } Eu_n \rightarrow u, Ev_n \rightarrow v,$$

und dann gilt  $\|v\|_V = \sqrt{\langle v, v \rangle_V}$  für alle  $v \in V$ . Wenn  $e_1, e_2, \dots$  eine Orthonormalbasis in  $U$  ist, so ist  $Ee_1, Ee_2, \dots$  eine Orthonormalbasis in  $V$ . Insbesondere ist  $U^*$  eine Vervollständigung von  $U$ , wobei die Riesz-Abbildung die Einbettung ist.

**Beispiel: Der Hilbert-Raum  $L^2((a, b); \mathbb{K})$**  Die Vervollständigung von  $U = C([a, b]; \mathbb{K})$  bzgl. dem Skalarprodukt (4.8) heißt Lebesgue-Raum  $L^2((a, b); \mathbb{K})$ . Die Elemente dieses Raumes werden unterschiedlich interpretiert, z.B. als lineare beschränkte Funktionale auf  $U$  oder als (Äquivalenzklassen von) “Funktionen”  $[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ , deren Quadrat in einem verallgemeinerten Sinn integrierbar ist. Einige Funktionen  $v : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  kann man im Sinne von (4.17) (dabei kann das Integral in (4.17) uneigentlich sein) mit Elementen von  $U^* = L^2((a, b); \mathbb{K})$  identifizieren, z.B.

$$v \in L^2((a, b); \mathbb{K}) \text{ für } v(x) := (x - a)^\alpha \text{ mit } \alpha > -\frac{1}{2},$$

andere nicht, z.B.

$$v \notin L^2((a, b); \mathbb{K}) \text{ für } v(x) := (x - a)^\alpha \text{ mit } \alpha \leq -\frac{1}{2}.$$

In mancher Hinsicht kann man mit den Elementen von  $L^2((a, b); \mathbb{K})$  umgehen wie mit Funktionen (z.B. kann man sie auf Teilintervalle  $[\alpha, \beta]$  mit  $a \leq \alpha < \beta \leq b$  einschränken), in mancher Hinsicht aber auch nicht (z.B. kann man ihnen im allgemeinen keinen Wert in einem gegebenen Punkt  $x \in [a, b]$  zuordnen).

**Fortsetzung linearer beschränkter Operatoren auf die Vervollständigung** Es seien  $(U, \|\cdot\|_U)$  ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{K}$ ,  $(V, \|\cdot\|_V)$  seine Vervollständigung mit der Einbettung  $E$ , und  $A : U \rightarrow U$  sei ein linearer beschränkter Operator. Dann existiert genau ein linearer beschränkter Operator  $B : V \rightarrow V$  mit

$$BEu = Au \text{ für alle } u \in U.$$

Der Operator  $B$  heißt dann Fortsetzung von  $A$  auf die Vervollständigung  $V$ .

**Verallgemeinerte Lösungen von Randwertproblemen** Wir betrachten das Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a) = u(b) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Wenn  $p \in C^1([a, b])$  und  $q, f \in C([a, b])$  ist, so kann eine klassische Lösung  $u \in C^2([a, b])$  von (4.27) suchen, wobei die Ableitungen im klassischen Sinn zu verstehen sind. Eine solche klassische Lösung erfüllt dann

$$\int_a^b (-pu'v' + (qu - f)v) dx = 0 \text{ für alle } v \in C^1([a, b]) \text{ mit } v(a) = v(b) = 0. \quad (4.28)$$

Die sogenannte **Variationsgleichung** (4.28) hat aber auch Sinn, wenn  $p, q$  und  $f$  nur integrierbar sind. Dann bestimmt man eine Lösung von (4.28), die dann **schwache Lösung** von (4.27) genannt wird, folgendermaßen:

Es sei  $U$  der Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  aller stetig differenzierbaren Funktionen  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u(a) = u(b) = 0$  gilt mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_U := \int_a^b (u'(x)v'(x) + u(x)v(x)) dx, \quad (4.29)$$

und  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  sei seine Vervollständigung. Dann gilt  $U^* = V^*$ . Für jede integrierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Abbildung  $v \in U \mapsto \int_a^b f(x)v(x)dx \in \mathbb{R}$  linear und stetig bzgl. (4.29). Nach dem Satz von Riesz existiert also ein  $v_f \in V$  mit

$$\langle v_f, v \rangle = \int_a^b f(x)v(x)dx \text{ für alle } v \in U.$$

Wenn  $p, q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar sind und  $u \in U$ , so ist die Abbildung  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Abbildung  $v \in U \mapsto \int_a^b (-p(x)u'(x)v'(x) + (q(x)u(x) - f(x))v(x)) dx \in \mathbb{R}$  linear und stetig bzgl. (4.29). Nach dem Satz von Riesz existiert also ein  $w_u \in V$  mit

$$\langle w_u, v \rangle = \int_a^b (-p(x)u'(x)v'(x) + (q(x)u(x) - f(x))v(x)) dx \text{ für alle } v \in U.$$

Die Abbildung  $u \in U \mapsto w_u \in V$  ist ihrerseits linear und stetig, also kann sie zu einer linearen stetigen Abbildung  $A : V \rightarrow V$  fortgesetzt werden. Dann erfüllt  $u \in U$  die Variationsgleichung (4.28) genau dann, wenn

$$Au = v_f. \quad (4.30)$$

Nun kann man aber Lösungen von (4.30) nicht nur in  $U$ , sondern auch in  $V$  suchen. Zum Beispiel, wenn  $p(x) \leq p_0 < 0$  und  $q(x) \geq q_0 > 0$  für alle  $x \in [a, b]$  ist, so gilt für alle  $u \in U$

$$\langle Au, u \rangle_V = \int_a^b (-p(x)u'(x)^2 + q(x)u(x)^2) dx \geq \min\{-p_0, q_0\} \|u\|_U^2.$$

Nach dem Lemma von Lax-Milgram ist also  $A$  bijektiv von  $V$  auf  $V$ . Also besitzt (4.30) genau eine Lösung

$$u = A^{-1}v_f \in V,$$

und diese ist die eindeutige schwache Lösung von (4.27). Dabei ist nicht klar, wie man die Elemente der Vervollständigung  $V$  und damit auch die verallgemeinerte Lösung  $u = A^{-1}v_f$  interpretieren soll ( $V$  heißt Sobolev-Raum  $W_0^{1,2}(a, b)$ ). Man kann zeigen, dass die verallgemeinerte Lösung von (4.27) als stetige Funktion aufgefaßt werden kann, im allgemeinen aber nicht als zweifach differenzierbare Funktion. Sie erfüllt die Randbedingungen in (4.27) im klassischen Sinn, aber die Differentialgleichung in (4.27) nur in einem verallgemeinerten Sinn.

Die obige Betrachtungsweise ist nützlich selbst im Fall, wenn  $p$  stetig differenzierbar ist und wenn  $q$  und  $f$  stetig sind, d.h. wenn (4.27) eine klassische Lösung besitzt, weil die Approximationen  $u_j$  entsprechend (4.13) gute Approximationen auch für klassische Lösungen von (4.27) sind. Das ist wichtig insbesondere deshalb, weil man im allgemeinen die Greensche Funktion zu (4.27) nicht explizit berechnen kann, d.h. dass man im allgemeinen die Lösung von (4.27) nicht explizit mit Hilfe der Greenschen Funktion berechnen kann, sondern nur durch Approximationen z.B. entsprechend (4.13).

## 4.9 Spektrum linearer beschränkter Operatoren

**Eigenwerte und Spektrum im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**  Es seien  $(U, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und  $A : U \rightarrow U$  ein linearer beschränkter Operator. Dann heißt eine komplexe Zahl  $\lambda$  regulärer Wert zu  $A$ , wenn  $A - \lambda I$  bijektiv von  $U$  auf  $U$  ist und wenn der inverse Operator  $(A - \lambda I)^{-1}$  stetig von  $U$  auf  $U$  ist. Die Menge aller  $\lambda \in \mathbb{C}$ , die nicht reguläre Werte zu  $A$  sind, heißt Spektrum von  $A$ , d.h.

$$\text{spec}A := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{entweder } A - \lambda I \text{ ist nicht bijektiv oder } (A - \lambda I)^{-1} \text{ ist nicht stetig}\}.$$

Wenn  $(U, \|\cdot\|)$  vollständig ist, so gilt

$$\text{spec}A = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ ist nicht bijektiv}\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Eine Zahl  $\lambda \in \text{spec}A$  heißt Eigenwert von  $A$ , wenn  $A - \lambda I$  nicht injektiv ist, d.h. wenn ein  $v \in U$  existiert mit

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0,$$

$v$  heißt dann Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

**Geometrische Vielfachheit** Wenn  $\lambda$  Eigenwert eines linearen beschränkter Operators  $A$  ist, so nennt man  $\dim \ker(A - \lambda I)$  geometrische Vielfachheit von  $\lambda$ . Die geometrische Vielfachheit kann unendlich sein.

**Algebraische Vielfachheit** Wenn  $\lambda$  Eigenwert eines linearen beschränkter Operators  $A$  ist, so nennt man

$$\dim \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} \ker(A - \lambda I)^n \right)$$

algebraische Vielfachheit von  $\lambda$ . Die algebraische Vielfachheit kann nicht kleiner als die geometrische Vielfachheit sein.

**Beispiele** Es sei  $U = \mathbb{C}[x]$  der Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  aller Polynome mit komplexen Koeffizienten und einer komplexen Variablen  $z$  mit der Norm

$$\|u\| := \max_{|z| \leq 1} |u(z)|.$$

(i) **Ein bijektiver linearer stetiger Operator, dessen Umkehrung nicht stetig ist** Wir betrachten den linearen beschränkten bijektiven Operator  $A : U \rightarrow U$ ,

$$(Au)(z) := u(z/2).$$

Dann gilt für die Polynome  $u_n(z) := z^n$

$$\|u_n\| = \max_{|z| \leq 1} |2^{-n} z^n| \leq 1, \text{ aber } \|A^{-1}u_n\| = \max_{|z| \leq 1} |2^n z^n| = 2^n \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Folglich ist  $A^{-1}$  unstetig.

(ii) **Ein Operator ohne Eigenwerte, aber mit  $\text{spec}A = \mathbb{C}$**  Wir betrachten den linearen beschränkten Operator  $A : U \rightarrow U$ ,

$$(Au)(z) := zu(z).$$

Die Gleichung  $(Au - \lambda u)(z) = (z - \lambda)u(z) = f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  ist lösbar nur für solche rechten Seiten  $f \in U$  mit  $f(\lambda) = 0$ . Also ist für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  der Operator  $A - \lambda I$  nicht surjektiv, also  $\text{spec}A = \mathbb{C}$ . Wenn eine komplexe Zahl  $\lambda$  Eigenwert von  $A$  wäre, so müßte es ein Polynom  $u \neq 0$  geben mit  $zu(z) = \lambda u(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , das geht ebenfalls nicht.

(iii) **Ein Eigenwert mit unendlicher geometrischer Vielfachheit** Wir betrachten den linearen beschränkten Operator  $A : U \rightarrow U$ ,

$$(Au)(z) := u(z) - u(-z).$$

Dann sind alle symmetrischen Polynome, d.h.  $u \in U$  mit  $u(z) = u(-z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , im Kern von  $A$ , also Null ist Eigenwert von  $A$  mit unendlicher geometrischer Vielfachheit.

**Komplexifizierung reeller Vektorräume** Es sei  $U$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Dann definiert man einen Vektorraum  $U_{\mathbb{C}}$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , die sogenannte Komplexifizierung von  $U$ , folgendermaßen:

$$\begin{aligned} U_{\mathbb{C}} &:= U \times U, \\ (u_1, v_1) + (u_2, v_2) &:= (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \\ (\alpha + i\beta)(u, v) &:= (\alpha u - \beta v, \alpha v + \beta u). \end{aligned}$$

Anstelle der ‘‘Paarschreibweise’’  $(u, v)$  für Elemente von  $U_{\mathbb{C}}$  benutzt man auch die formale Schreibweise  $u + iv$ . Wenn  $u_1, \dots, u_n$  eine Basis in  $U$  ist, so ist  $(u_1, 0), \dots, (u_n, 0)$  eine Basis in  $U_{\mathbb{C}}$ , d.h. die (reelle) Dimension von  $U$  ist gleich der (komplexen) Dimension von  $U_{\mathbb{C}}$ . Wenn  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $U$  ist, so wählt man in  $U_{\mathbb{C}}$  z.B. die Norm

$$\|(u, v)\|_{\mathbb{C}} := \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$$

(oder eine dazu äquivalente Norm). Wenn  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt in  $U$  ist, so wählt man in  $U_{\mathbb{C}}$  z.B. das Skalarprodukt

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{\mathbb{C}} := \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + i(\langle u_2, v_1 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle).$$

**Komplexifizierung linearer Operatoren auf reellen Vektorräumen** Es seien  $U$  und  $V$  zwei Vektorräume über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $A : U \rightarrow V$  ein linearer Operator. Dann definiert man einen linearen Operator  $A_{\mathbb{C}} : U_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ , die sogenannte Komplexifizierung von  $A$ , folgendermaßen:

$$A_{\mathbb{C}}(u, v) := (Au, Av).$$

Wenn  $A$  beschränkt bzgl. zweier Normen in  $U$  und  $V$  ist, so ist  $A_{\mathbb{C}}$  ebenfalls beschränkt bzgl. der entsprechenden Normen in  $U_{\mathbb{C}}$  und  $V_{\mathbb{C}}$ .

**Eigenwerte und Spektrum im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**  Es seien  $(U, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $A : U \rightarrow U$  ein linearer beschränkter Operator. Dann heißt die Menge

$$\text{spec}A := \text{spec}A_{\mathbb{C}}$$

Spektrum von  $A$ , und  $\lambda \in \text{spec}A$  heißt Eigenwert von  $A$ , wenn ein  $v \in U_{\mathbb{C}}$  existiert mit

$$A_{\mathbb{C}}v = \lambda v, \quad v \neq 0,$$

$v$  heißt dann Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Wenn  $(u_1, u_2) \in U_{\mathbb{C}} = U \times U$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist, so ist  $(u_1, -u_2)$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$ .

**Beispiele** (i) Wir betrachten  $\mathbb{C}$  als zweidimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und die reell-lineare (aber nicht komplex-lineare) Abbildung

$$A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : Az := i\bar{z}.$$

Dann besitzt  $A$  zwei verschiedene Eigenwerte, nämlich  $\lambda = \pm 1$ , und die entsprechenden Eigenvektoren sind  $z = 1 + i$  und  $z = 1 - i$ . Die Gleichung  $Az = i\bar{z} = iz$  ist richtig für  $z = 1$ , trotzdem ist  $\lambda = i, z = 1$  kein Eigenpaar von  $A$ !

(ii) Wir betrachten  $\mathbb{C}$  als zweidimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und die reell-lineare (und sogar komplex-lineare) Abbildung

$$A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : Az := iz.$$

Dann besitzt  $A$  zwei verschiedene Eigenwerte, nämlich  $\lambda = \pm i$ , und die entsprechenden Eigenvektoren sind  $(1, -i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  und  $(1, i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Allerdings sollte man die Paare  $(1, -i)$  und  $(1, i)$  nicht als  $1 + i(-i)$  und  $1 + ii$  schreiben!

(iii) Üblicherweise werden die Vektorräume  $C([a, b]; \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$  und  $C([a, b]; \mathbb{C})$  identifiziert mittels der linearen bijektiven Abbildung

$$(u, v) \in C([a, b]; \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \mapsto J(u, v) := u + iv \in C([a, b]; \mathbb{C}).$$

Analog kann man für jeden linearen beschränkten Operator  $A : C([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{R})$  dessen Komplexifizierung  $A_{\mathbb{C}}$  mit dem Operator  $JA_{\mathbb{C}}J^{-1}$  identifizieren. Dieser Operator arbeitet folgendermaßen:

$$[(JA_{\mathbb{C}}J^{-1})(u + iv)](x) = [(JA_{\mathbb{C}})(u, v)](x) = [J(Au, Av)](x) = (Au)(x) + i(Av)(x).$$

Wenn z.B.  $A$  definiert ist durch

$$(Au)(x) := \int_a^x u(y)dy,$$

so ist seine Komplexifizierung

$$[(JA_{\mathbb{C}}J^{-1})(u + iv)](x) = \int_a^x u(y)dy + i \int_a^x v(y)dy.$$

Daraus folgt leicht  $\text{spec}A = \{0\}$ , aber Null ist kein Eigenwert von  $A$ .

## 4.10 Spektrum linearer kompakter Operatoren

**Kompakte Operatoren** Es seien  $(U, \|\cdot\|_U)$  und  $(V, \|\cdot\|_V)$  zwei normierte Vektorräume über  $\mathbb{K}$ . Dann heißt eine lineare Abbildung  $A : U \rightarrow V$  kompakter Operator von  $U$  nach  $V$ , wenn für jede beschränkte Folge  $u_1, u_2, \dots \in U$  die Folge  $Au_1, Au_2, \dots \in V$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Jeder lineare kompakte Operator ist beschränkt.

**Superpositionen** Es seien  $(U, \|\cdot\|_U)$ ,  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Vektorräume über  $\mathbb{K}$  und  $A : U \rightarrow V$  und  $B : V \rightarrow W$  lineare beschränkte Operatoren, dann gilt:

Wenn  $A$  oder  $B$  kompakt ist, so ist auch  $B \circ A$  kompakt.

**Spektraleigenschaften linearer kompakter Operatoren** Es seien  $(U, \|\cdot\|_U)$  ein normierter Vektorräume über  $\mathbb{K}$  und  $A : U \rightarrow U$  ein linearer kompakter Operator, dann gilt:

- (i)  $0 \in \text{spec}A$
- (ii) Alle  $\lambda \in \text{spec}A$  sind Eigenwerte von  $A$ .
- (iii) Alle Eigenwerte von  $A$  besitzen endliche geometrische Vielfachheiten.

**Beispiel: Integraloperatoren** Es sei  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  eine stetige Funktion. Dann ist die lineare Abbildung

$$A : C([a, b]; \mathbb{K}) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{K}) : (Au)(x) := \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

ein kompakter Operator von  $(C([a, b]; \mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$  nach  $(C([a, b]; \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty})$ .

## 4.11 Spektrum linearer beschränkter selbstadjungierter Operatoren

Es seien  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt über  $\mathbb{K}$  und  $A : U \rightarrow U$  ein linearer beschränkter Operator. Der Operator  $A$  heißt selbstadjungiert, wenn

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \text{ für alle } u, v \in U,$$

und dann gilt:

- (i) Alle Eigenwerte von  $A$  sind reell.
- (ii) Wenn  $\lambda$  Eigenwert von  $A$  ist, so gilt  $\ker(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I)^2$ . Insbesondere sind die geometrische und die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$  gleich (solche Eigenwerte nennt man halbeinfach).
- (iii) Aus  $Au = \lambda u$  und  $Av = \mu v$  mit  $\lambda \neq \mu$  folgt  $\langle u, v \rangle = 0$ .

## 4.12 Spektrum linearer kompakter selbstadjungierter Operatoren

**Satz** Es seien  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt über  $\mathbb{K}$  und  $A : U \rightarrow U$  ein linearer kompakter selbstadjungierter Operator mit  $\dim \operatorname{im} A = \infty$ . Dann existieren Folgen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R}$  und  $v_1, v_2, \dots \in U$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $Av_j = \lambda_j v_j$ ,
- (ii)  $\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk}$ ,
- (iii)  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots > 0$  und  $\lambda_j \rightarrow 0$ ,
- (iv)  $|\lambda_j| = \max\{|\langle Au, u \rangle| : \|u\| = 1, \langle u, v_k \rangle = 0 \text{ für } k = 1, 2, \dots, j-1\}$ ,
- (v)  $\dim \ker(A - \lambda_j I) < \infty$ ,
- (vi)  $Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle u, v_j \rangle v_j$  für alle  $u \in U$ .

Wenn  $U$  vollständig ist, so gilt außerdem  $\operatorname{spec} A = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ , und für jedes  $u \in U$  existiert ein  $u_0 \in \ker A$  mit

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, v_j \rangle v_j.$$

**Beispiel: Eigenwertprobleme für Differentialgleichungen zweiter Ordnung** Es seien  $p \in C^1([a, b])$  und  $q \in C([a, b])$ , und es gelte

$$\min_{a \leq x \leq b} p(x) > 0.$$

Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} (p(x)v'(x))' + q(x)v(x) &= \lambda v(x), \quad a \leq x \leq b, \\ v(a) = v(b) &= 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Es sei

$$q_0 := \max_{a \leq x \leq b} q(x) + 1.$$

Wenn  $u$  eine Lösung des linearen homogenen Randwertproblems

$$\begin{aligned} (p(x)u'(x))' + (q(x) - q_0)u(x) &= 0, \quad a \leq x \leq b, \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

ist, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left( (p(x)u'(x))' + (q(x) - q_0)u(x) \right) u(x) dx \\ &= \int_a^b \left( -p(x)u'(x)^2 + (q(x) - q_0)u(x)^2 \right) dx \leq - \int_a^b u(x)^2 dx, \end{aligned}$$

also  $u = 0$ . Mit anderen Worten: Das lineare homogene Randwertproblem (4.32) besitzt keine Lösung  $u \neq 0$ . Folglich gilt, dass für jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  das lineare inhomogene Randwertproblem

$$\begin{aligned} (p(x)u'(x))' + (q(x) - q_0)u(x) &= f(x), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung  $u$  besitzt, und diese kann durch die Greensche Funktion  $G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dargestellt werden:

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy =: (Af)(x), \quad a \leq x \leq b. \tag{4.33}$$

Folglich ist  $(\lambda, v)$  eine Lösung von (4.31) genau dann, wenn

$$Av = \mu v \text{ mit } \mu = \frac{1}{\lambda - q_0} \leq -1.$$

Der in (4.33) definierte lineare Operator  $A : C([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{R})$  ist kompakt und selbstadjungiert bzgl. dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x) dx. \tag{4.34}$$

Nach dem obigen Satz existieren also Eigenpaare  $(\mu_j, v_j)$  des Operators  $A$  mit den obigen Eigenschaften (i)-(v), insbesondere mit  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots < 0$  und  $\mu_j \rightarrow 0$ . Also sind  $(\lambda_j, v_j)$  mit

$$\lambda_j := q_0 + \frac{1}{\mu_j}$$

Lösungen von (4.31) mit  $q_0 - 1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \rightarrow -\infty$  und

$$\int_a^b v_j(x)v_k(x) dx = \delta_{jk}.$$

Es gilt sogar

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \rightarrow -\infty,$$

weil sonst alle Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung  $(pv')' + (q - \lambda)v = 0$  die Randbedingungen  $\alpha_0v(a) + \alpha_1v'(a) = \beta_0v(b) + \beta_1v'(b) = 0$  erfüllen müßten, und das widerspricht der Voraussetzung (3.3). Wenn  $\lambda_j \neq 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  ist und folglich das Randwertproblem

$$\begin{aligned} (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned}$$

für jedes  $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$  genau eine Lösung  $u$  besitzt, so gilt für diese Lösung

$$u = A(f - q_0u) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle f - q_0u, v_j \rangle v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \langle f, v_j \rangle v_j.$$

Dabei konvergieren die Reihen im Sinne des Skalarprodukts (4.34). Damit sind die wesentlichen Aussagen aus §3.3 über Eigenwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung bewiesen für den Fall von Dirichlet-Randbedingungen. Im Fall allgemeiner Randbedingungen (3.16) sind die Rechnungen analog (weil beim partiellen Integrieren die Randterme ebenfalls verschwinden).