Prüfungsklausur Informatik 1, 25.4.2003
(Dieses Informationsblatt bitte nicht abgeben)

Allgemeine Hinweise:

Beachten Sie bitte, daß jede Antwort zu begründen ist. Fehlende, unzureichende oder falsche Begründungen haben zur Folge, dass die Aufgabe als nicht bzw. nur teilweise richtig gewertet wird. Eine präzise, kurze Erläuterung des Rechenweges ist gefordert; dadurch sichern Sie auch, daß im Falle eines Rechenfehlers die Aufgabe nicht als vollständig falsch bewertet werden muß.

Wichtig: Bitte benutzen Sie für Ihre Lösung das jeweilige Aufgabenblatt, das immer nur eine Aufgabe enthält (bei Platzmangel bitte die Rückseite verwenden und / oder weitere Blätter anheften). Tragen Sie auf jedem Blatt Ihre Immatrikulations-Nr. und Ihren Namen ein.

Abgabe: 15.30 Uhr (nach Aufgaben sortiert)

Erreichbare Punktzahlen:
Aufgabe 1 : 5
Aufgabe 2 : 12
Aufgabe 3 : 12
Aufgabe 4 : 12
Aufgabe 5 : 10
Aufgabe 6 : 9

Noten:
ab 24 P.: 4
ab 36 P.: 3
ab 48 P.: 2
ab 58 P.: 1

Aufgabe 1

Name:
Immatr.-Nr.:

(1) A, B, C, D, E, J, K, L, seien Aussagen. Entscheiden Sie, welchen Wahrheitswert die Aussagenverbindung

$$\Phi: \ (\neg J \wedge K) \vee \Big((((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow D) \wedge (E \vee L) \Big)$$

hat, wenn die Wahrheitswerte der Grundaussagen durch die folgende Tabelle gegeben sind.

A	B	C	D	E	J	K	L
W	F	F	F	W	F	F	F

Ergebnis. Φ hat den Wahrheitswert F.

(2) Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) $A \Rightarrow B$; $B \Rightarrow A$,
   (b) $A \Rightarrow B$; $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Aufgabe 2

Name:
Immatr.-Nr.:

(1) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^3 + 2n^2 - 9n - 6}{4n^3 + 6n^2 + 4n - 3} \; .$$

Ergebnis
Offensichtlich konvergieren Zähler und Nenner der rechten Seite von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-5 + \frac{2}{n} - \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n^3}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(-5 + \frac{2}{n} - \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n^3})}{\lim_{n\to\infty}(4 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3})} \; ,$$

gegen -5, bzw. 4. daher existiert der gesuchte Grenzwert und ist gleich $-\dfrac{5}{4}$.

(2) Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to\frac{5}{3}} \frac{-6x^3 - x^2 - 4x - 3}{-9x^3 + 34x - 15} \; .$$

Ergebnis
Mit $F(x) = -6x^3 - x^2 - 4x - 3$ und $G(x) = -9x^3 + 34x - 15$ bezeichnen wir Zähler, bzw. Nenner des angegebenen Quotienten. Gesucht ist der Grenzwert für $x \to x_0 := \frac{5}{3}$.
Offensichtlich konvergieren $F(x)$ und $G(x)$ (als stetige Funktionen) gegen $F(x_0) = -\frac{362}{9}$, bzw. $G(x_0) = 0$. Der gesuchte Grenzwert existiert daher nicht (Sie können sich überlegen, daß er auch nicht im uneigentlichen Sinn, d.h. als $+\infty$ oder $-\infty$ existiert).

(3) Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(x)}\ .$$

Ergebnis
Durch zweimalige Anwendung der l'hospitalschen Regel ergibt sich der Grenzwert $\frac{1}{4}$.

Aufgabe 3

Name / Gruppe:
Immatr.-Nr.:

(1) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{n!}$

(2) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{15}}.$$

(3) Untersuchen Sie, ob die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

Lösungen.

(1) Die Konvergenz der Reihe a) folgt leicht mit dem Quotientenkriterium. Da die Glieder der Folge a) dann gegen 0 konvergieren, müssen die der Folge b) gegen Unendlich divergieren, bilden insbesondere keine Nullfolge, d.h. die Reihe unter b) divergiert.

(2) Das Quotientenkriterium zeigt, dass für $|x| < 1$ Konvergenz vorliegt und für positive x mit $x \geq 1$ Divergenz, d.h. der Konvergenzradius ist 1.

(3) Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1},$$

daher folgt Divergenz durch Vergleich mit der harmonischen Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Aufgabe 4

Name:
Immatr.-Nr.:

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x}) \quad \text{an der Stelle} \quad x = 0$$

nach dem Taylorschen Satz so weit, dass Sie damit für die Zahl $y := f(0.01)$ die ersten 7 Stellen nach dem Komma errechnen können; geben Sie y mit dieser Genauigkeit an.

Lösung. Wir berechnen zunächst die Ableitungen bis zur 4. Ordnung:

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2}, \qquad f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{4\cdot(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{48x\cdot(x^2+1)}{(1-x^2)^4}.$$

Das lagrangesche Restglied $R_4(x) = \dfrac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$ mit $0 < \theta < 1$ lässt sich für $x = 10^{-2}$ durch

$$|R_4(x)| < \frac{1}{4!}48\cdot 10^{-2}\cdot 4\cdot 10^{-8} < 10^{-8}$$

abschätzen. Nach der Taylorschen Formel folgt

$$f(x) = 2x + \frac{4}{3!}x^3 + R_3(x), \text{ daher}$$

$$y = f(0.01) = 0.02 + 0.000000\overline{6} + R_3(0.01) = 0.0200006\ldots$$

Aufgabe 5

Name:
Immatr.-Nr.:

Wie verläuft die Kurve $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$?

(1) Bestimmen Sie Nullstellen, lokale und globale Extrema, Wendepunkte, untersuchen Sie die Kurve auf Monotonie und Konvexität sowie ihr Verhalten im Unendlichen.

(2) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

Anmerkungen zur Lösung.

(a) Bei den Nullstellen ist eine leicht zu erraten, die anderen lassen sich daraus berechnen. Das Nullstellentripel von f ist $(1, -2, 0)$.

(b) Wir setzen $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 0$. Es ist $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3x^2 + 2x - 2$, $f''(x) = 6x + 2$, $f'''(x) = 6$. Zur Bestimmung der kritischen Punkte ist eine Fallunterscheidung vorzunehmen.

Da $b^2 - 3ac = 7 > 0$ ist, besitzt f' die verschiedenen Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$.
Für $f''(x_i) > 0$ hat f an der Stelle x_i ein lokales Minimum, für $f''(x_i) < 0$ ein lokales Maximum mit dem Wert $f(x_i)$. Es ist $f''(x_1) = 2\sqrt{7}$ und $f''(x_2) = -2\sqrt{7}$.
Daher muß an der Stelle x_1 ein lokales Minimum und an der Stelle x_2 ein lokales Maximum vorliegen. Einsetzen ergibt für f die entsprechenden Werte $f(x_1) = -(\frac{14}{27}\sqrt{7} - \frac{20}{27})$ und $f(x_2) = (\frac{14}{27}\sqrt{7} + \frac{20}{27})$.

(c) Einzige Nullstelle von f'' ist $-\frac{1}{3}$; da f''' konstant und nicht null ist, besitzt f dort einen Wendepunkt.

(d) Aussagen zu Monotonie und Konvexität ergeben sich unmittelbar aus den obigen Betrachtungen.

Aufgabe 6

Name:
Immatr.-Nr.:

Bestimmen Sie für die natürlichen Zahlen $n \geq 0$ eine Rekursionsformel für das unbestimmte Integral

$$I_{n+1} := \int x^{n+1} e^{-x} \mathrm{d}x,$$

d.h. eine Formel, die I_{n+1} durch Integrale I_k mit $k \leq n$ ausdrückt.
Bestimmen Sie insbesondere I_3.

Lösung. Durch partielle Integration ergibt sich

$$I_{n+1} = -x^{n+1} e^{-x} + (n+1) \cdot I_n, \quad \text{daher}$$

$$I_3 = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x}.$$