Mathematik für Informatiker I: Analysis

Aufgabenserie 4 zum 19.11.02

1. Beweisen Sie für beliebige Zahlen $x \in \mathbb{R},\ x \geq 1$ die folgende Ungleichung.
$$2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$
Lässt sich die Voraussetzung noch abschwächen?

2. Beweisen Sie:
   (1) Sind $x, y \in \mathbb{R}$ nichtnegative Zahlen mit $x \cdot y = 1$, so gilt $x + y \geq 2$.
   (2) Für nichtnegative Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt stets $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.
   Hinweis: Nach einer Fallunterscheidung können Sie leicht (2) aus (1) folgern.

3. Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ und existiert eine Zahl $m \in M$, die der Bedingung $x \leq m$ für alle $x \in M$ genügt, so heißt m Maximum von M. Diese Zahl ist nach Serie 2 (4. (1)) eindeutig bestimmt und wird mit $\max(M) := m$ bezeichnet. Beweisen Sie:
   (1) Ist $a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$ und wird
   $$a \cdot M := \{a \cdot x \mid x \in M\}$$
   gesetzt, so besitzt auch $a \cdot M$ ein Maximum und es gilt
   $$\max(a \cdot M) = a \cdot \max(M).$$
   (2) Ist N eine weitere Teilmenge der reellen Zahlen, die ein Maximum besitzt und setzen wir
   $$M + N := \{x + y \mid x \in M, y \in N\},$$
   so gilt
   $$\max(M + N) = \max(M) + \max(N).$$

4. Mit $\mathrm{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die durch den Absolutbetrag definierte Abbildung $\mathrm{d}(x, y) := |x - y|$. Beweisen Sie: d ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$, d.h. für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:
   (1) $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$, und $\mathrm{d}(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist.
   (2) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.
   (3) $\mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z) \geq \mathrm{d}(x, z)$.

5.* Mit F bezeichnen wir eine nichtleere Menge, mit $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Nun wird durch

$$\mathrm{d} : F^n \times F^n \to \mathbb{R},$$

$$\mathrm{d}\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) := \text{Anzahl der Elemente von } \{i \mid x_i \neq y_i\}$$

eine Abbildung definiert. Beweisen Sie, dass d eine Metrik auf F^n ist (im Sinne der vorhergehenden Aufgabe).

Anmerkung: Diese Metrik wird in der Analysis nicht verwendet, wohl aber in der Informatik.