Mathematik für Informatiker I: Analysis

Aufgabenserie 6 zum 3.12.02

1. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Zahlenfolgen mit $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ und $b_n = 2^n - n$.
   (1) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt? Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend?
   (2) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt? Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend?
   (3) Ist a_n aus $\mathrm{O}(b_n)$?
   (4) Ist b_n aus $\mathrm{O}(a_n)$?

2. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge komplexer Zahlen. Beweisen Sie:
   (1) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.
   (2) Im Fall der Konvergenz gilt $\mathrm{Re}\big(\lim_{n\to\infty}(z_n)\big) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(z_n)$ und $\mathrm{Im}\big(\lim_{n\to\infty}(z_n)\big) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}(z_n)$.

3. Bestimmen Sie die Binärdarstellungen der folgenden reellen Zahlen a, b und geben Sie im Fall (2) die ersten 5 Intervalle der nach Konstruktion in der Vorlesung bestimmten zugehörigen Intervallschachtelung an.
   (1) $a = 1129$
   (2) $b = \dfrac{5}{14}$

4. Geben Sie für jeden der Fälle eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der genannten Eigenschaft an.
   (1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 7.
   (2) 7 ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht Grenzwert der Folge.
   (3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt genau die Häufungspunkte 1, 3 und 7.
   (4) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt und 7 ist Häufungspunkt.

5.* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge reeller Zahlen. Sind die folgenden Bedingungen äquivalent?
   (1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.
   (2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt genau einen Häufungspunkt.

Hinweis: Klausurtermin ist Montag, der 17.2.2003.