M. Roczen

Schwerpunkte zum Stoff der linearen Algebra I, II Sommmersemester 03 Wintersemester 03/04

- Monoid (Begriff, erste Beispiele)
- Produkt- und Summen-Notation in Monoiden
- Gruppe (Begriff und elementare Eigenschaften)
- Erste Beispiele für Gruppen
- Untergruppen (Untergruppenkriterium, Erzeugendensysteme)
- Gruppenhomomorphismen (Begriff, Eigenschaften)
- Die Gruppe S_n (Rechnen mit Permutationen)
- Zyklen und Transpositionen
- Vorzeichen (Signum) einer Permutation
- Zerlegung von Permutationen in Zyklen bzw. Transpositionen
- Linke und rechte Nebenklassen einer Untergruppe
- Satz von Lagrange, Index einer Untergruppe
- Kern eines Gruppenhomomorphismus
- Bild und Kern als Untergruppen
- Faktorgruppe und kanonischer Homomorphismus
- Jeder Normalteiler ist Kern eines Gruppenhomomorphismus
- Der Homomorphiesatz
- Klassifikation der zyklischen Gruppen
- Ringoperationen (elementare Eigenschaften, allgemeines Distributivgesetz, binomischer Satz)
- Erste Beispiele für Ringe
- Unterringe eines Ringes
- Ringhomomorphismen und Isomorphismen
- Elementare Eigenschaften von Ringhomomorphismen
- Nullteilerfreie Ringe (Integritätsbereiche)
- Kürzungsregel in Integritätsbereichen
- Körper und Unterkörper, Beispiele
- Konstruktion der rationalen Zahlen
- Verallgemeinerung der Konstruktion rationaler Zahlen (Konstruktion von Quotientenkörpern beliebiger Integritätsbereiche)
- Komplexe Zahlen (Realteil, Imaginärteil, Konjugation)
- Rechnen mit komplexen Zahlen
- Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis)
- Der Polynomring in einer Unbestimmten (Definition)

- Prinzip des Koeffizientenvergleichs
- Grad eines Polynoms, Eigenschaften der Gradfunktion
- Ein Polynomring über einem Integritätsbereich ist wieder ein Integritätsbereich
- Begriff der Algebra über einem Ring, Strukturhomomorphismus
- Homomorphismen und Isomorphismen von Algebren
- Universaleigenschaft und Eindeutigkeit der Polynomalgebra
- Definition der Polynomalgebra $R^{[n]}$ in n Unbestimmten (Monome, Terme, vollständiger Grad)
- Universalität von $R^{[n]}$
- Adjunktion von Elementen
- Teilbarkeit einem kommutativen Integritätsbereich
- Assoziiertheit als Äquivalenzrelation
- Gruppe der Einheiten und irreduzible Elemente
- Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches
- Der euklidische Algorithmus
- Lemma von Euklid, Primzahlen
- Hauptsatz der Arithmetik
- Ideale, durch Teilmengen eines Ringes erzeugte Ideale, Hauptideale
- Konstruktion von Faktorringen
- Homomorphiesatz für Ringe
- Die endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ (p Primzahl)
- Der Primkörper eines Körpers
- Definition der Matrix, Typ einer Matrix, Zeilenindex und Spaltenindex
- Zeilen und Spalten einer Matrix, transponierte Matrix
- Rechnen mit Matrizen über kommutativen Ringen (Addition und Multiplikation mit Elementen des Grundringes)
- Ausführen der Matrizenoperationen an einfachen Beispielen
- Definition des Matrizenprodukts und einige Rechenregeln
- Kroneckersymbol und Einheitsmatrix
- Spezielle quadratische Matrizen (obere und untere Dreiecksmatrizen, schiefsymmetrische Matrizen, Blockdiagonalmatrizen)
- Äquivalenz linearer Gleichungssysteme
- Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform
- Elementare Umformungen linearer Gleichungssysteme
- Division mit Rest für lineare Polynome
- Gaußscher Algorithmus zur Überführung eines Systems in Stufengestalt; praktische Ausführung
- Beschreibung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems
- Zeilenäquivalente Umformungen von Matrizen
- Reduzierte Form eines linearen Gleichungssystems, Existenz und Eindeutigkeit, praktische Bestimmung

- Rang einer Matrix, Rangbestimmung unter Verwendung elementarer Zeilenoperationen
- Der Satz von Kronecker-Capelli und Anwendung auf Systeme mit quadratischer Koeffizientenmatrix
- Definition und Charakterisierung invertierbarer Matrizen
- Die Gruppeneigenschaft von $\mathrm{GL}(n;K)$
- Praktische Bestimmung der Inversen einer quadratischen Matrix mit dem gaußschen Algorithmus
- Erzeugung der allgemeinen linearen Gruppe durch Elementarmatrizen
- Der Rang einer Matrix stimmt mit dem ihrer Transponierten überein
- Leitmonome, Division mit Rest
- Euklidischer Algorithmus (Kettendivision) für Polynome einer Unbestimmten
- Nullstellen von Polynomen in einer Unbestimmten (Ausklammern von Linearfaktoren, Multiplizität einer Nullstelle)
- Identitätssatz für Polynome
- Irreduzible Faktoren reeller bzw. komplexer Polynome
- Beispiele irreduzibler Polynome
- Existenz und Eindeutigkeit der Faktorzerlegung in $K[X]$
- Vektorraum, Begriff und elementare Eigenschaften; Beispiele
- Produkt von Vektorräumen; der Standardraum K^n
- Homomorphismen, elementare Eigenschaften
- Homomorphismen und Isomorphismen der Standardräume
- Invarianz der Dimension
- Unterräume von Vektorräumen, Unterraumkriterium
- Summe und Durchschnitt von Unterräumen
- Bild und Kern eines Homomorphismus, erste Eigenschaften
- Die lineare Hülle einer Menge von Vektoren
- Innere direkte Summe von Unterräumen
- Projektionen auf direkte Summanden
- Lineare Fortsetzung auf direkte Summen
- Direkte Summe von Homomorphismen
- Äußere direkte Summe von Vektorräumen
- Faktorraum und kanonischer Homomorphismus
- Homomorphiesatz für Vektorräume
- Erster und zweiter Isomorphiesatz
- Exakte Folgen von Vektorräumen, Beschreibung einiger Eigenschaften von Homomorphismen durch exakte Folgen
- Die zu einem Homomorphismus gehörige exakte Folge
- Beziehung zwischen Faktorraum und Komplementärraum
- Existenz von Komplementärräumen
- Beschreibung von Homomorphismen durch Bild, Kern und Kokern

- Lineare Unabhängigkeit einer Familie von Vektoren
- Beispiele linear unabhängiger Familien
- Abhängigkeit von Linearkombinationen, Koeffizientenvergleich
- Basen eines Vektorraumes
- Zu Basen gehörige direkte Zerlegungen und Basen direkter Summen
- Basen und lineare Fortsetzung
- Koordinaten und Koordinatensysteme
- Charakterisierung von Basen
- Existenz von Basen, Basisergänzungssatz
- Klassifikation der Vektorräume
- Begriff der Dimension eines Vektorraumes; Beispiele
- Rang und Defekt linearer Abbildungen, Rangsatz
- Dimension der Summe und der direkten Summe von Unterräumen
- Rang einer linearen Abbildung endlichdimensionaler Standardräume sowie der zugehörigen Matrix
- Auswahl einer maximalen linear unabhängigen Teilmenge aus einer endlichen Menge von Vektoren im Standardraum K^n
- Ergänzung einer linear unabhängigen Teilmenge einer Menge von Vektoren im Standardraum K^n zu einer Basis bzw. noch allgemeiner:
- Für eine gegebene Basis $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ im Standardraum K^n und eine Menge $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r\}$ linear unabhängiger Vektoren sind r der Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ durch die Vektoren $\boldsymbol{w}_j$ so zu ersetzen, dass wiederum eine Basis entsteht (Austauschverfahren).
- Matrix einer linearen Abbildung bezüglich gegebener Basen; Koordinaten der Bildvektoren
- Übergangsmatrix zwischen Basen eines Vektorraumes; Bestimmung der Übergangsmatrix für Basen des Standardraumes K^n
- Funktorialität der zugeordneten Matrix
- Die lineare Abbildung zu einer gegebenen Matrix
- Umrechnung der Matrix einer linearen Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$ bezüglich gegebener Paare von Basen (Basiswechsel)
- Bestimmung von Basen für $\operatorname{im}(\varphi)$ und $\ker(\varphi)$ zu einer durch ihre Matrix gegebenen linearen Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$
- Bestimmung von Basen für K^n und K^m, für die eine gegebene lineare Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$ eine Matrix $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt
- Begriff der Ähnlichkeit quadratischer Matrizen
- Definition des dualen Vektorraumes und der kanonischen Paarung
- Bestimmung dualer Basen zu gegebenen Basen des Standardraumes
- Bestimmung eines Gleichungssystems, dessen Lösungsmenge ein gegebener Unterraum des Standardraumes ist
- Die duale einer linearen Abbildung, Kofunktorialität und die zugehörige Matrix
- Kanonischer Homomorphismus eines Vektorraumes in seinen bidualen

- Kanonische Isomorphie von V und V^* im Fall $\dim(V) < \infty$
- Der Begriff der p-linearen Abbildung
- Beispiele p-linearer Abbildungen
- Der Begriff der symmetrischen, schiefsymmetrischen bzw. alternierenden p-linearen Abbildung
- Begriff der Determinantenfunktion
- Existenz und Eindeutigkeit der Determinantenfunktion zu einer gegebenen Basis
- Determinante einer Matrix
- Erste Eigenschaften der Determinante, leibnizsche Formel
- Determinantenfunktionen und Basiswechsel
- Der Multiplikationssatz für Determinanten
- Determinante einer Blockmatrix
- Formel für die inverse Matrix
- Laplacescher Entwicklungssatz
- Cramersche Regel
- Rangbestimmung für Matrizen mittels Unterdeterminanten
- Invarianz der Determinante gegenüber Ähnlichkeitstransformationen und Determinante eines Endomorphismus
- Orientierungserhaltende Endomorphismen reeller Standardräume; gleichorientierte Basen
- Identitätssatz für Polynome mehrerer Unbestimmter über einem unendlichen Körper
- Übertragung einiger Determinanteneigenschaften auf Matrizen über einem kommutativen Ring
- Duale Paarungen
- Matrix einer Bilinearform, elementare Eigenschaften und Basiswechsel
- Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen, symmetrischer gaußscher Algorithmus
- Äquivalenz quadratischer Formen, Klassifikation über den reellen und komplexen Zahlen
- Determinantenkriterium für positive Definitheit
- Symplektische Basen und Klassifikation alternierender Formen
- Tensorprodukt von Vektorräumen, Universaleigenschaft und Existenz
- Elementare Rechenregeln für Tensoren, Auffinden einer Basis des Tensorprodukts, einige Isomorphismen
- Bifunktorialität des Tensorprodukts
- Das Tensorprodukt (Kroneckerprodukt) von Matrizen und seine Eigenschaften
- Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus
- Eigenräume eines Endomorphismus
- Charakteristische Gleichung und charakteristisches Polynom; Bestimmung von Eigenwerten und Eigenräumen

- Charakteristische Polynome direkter Summen von Endomorphismen
- Begleitmatrix eines normierten Polynoms
- Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus bzw. einer Matrix
- Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines Endomorphismus
- Algebraische und geometrische Multiplizität von Eigenwerten
- Diagonalisierbarkeit – Kriterien und Auffinden einer Diagonalform in der Ähnlichkeitsklasse einer diagonalisierbaren Matrix; Spektralzerlegung eines Endomorphismus
- Halbeinfache Matrizen und halbeinfache Endomorphismen
- Simultane Diagonalisierbarkeit
- Invariante Unterräume
- Fahnen eines Vektorraumes
- Invariante Fahnen und trigonalisierbare Endomorphismen
- Charakterisierung trigonalisierbarer Endomorphismen bzw. Matrizen
- Trigonalisierung einer Matrix, Existenz und rechnerische Ausführung
- Charakterisierung nilpotenter Endomorphismen und (entsprechend) nilpotenter Matrizen
- Klassifikation der nilpotenten Endomorphismen
- Zyklische Unterräume und zyklische Vektoren
- Partitionen und Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen
- Rechnerische Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix
- Höhere Eigenräume eines Endomorphismus und Hauptraumzerlegung
- Der Satz von Cayley-Hamilton und das Minimalpolynom eines Endomorphismus
- Existenz und Eindeutigkeit der jordanschen Normalform eines Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt
- Rechnerische Bestimmung der jordanschen Normalform einer Matrix
- Der Begriff des affinen Raumes
- Beispiele affiner Räume
- Affine Abbildungen und die zugehörigen linearen Abbildungen der Translationsräume
- Erste Eigenschaften affiner Abbildungen
- Die affine Gruppe
- Der Begriff des affinen Unterraumes
- Affine Unterräume des Standardraumes als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme
- Lagebeziehungen von Unterräumen
- Durchschnitt affiner Unterräume und Verbindungsraum einer Menge von Punkten
- Dimension des Verbindungsraumes zweier affiner Unterräume
- Affin unabhängige Familien von Punkten
- Existenz affiner Basen

- Affine Fortsetzung und affine Koordinatensysteme; Bestimmung affiner Koordinaten
- Affine Koordinatentransformation in $K[X_1, \ldots, X_n]$
- Affine Hauptachsenpolynome reeller und komplexer Quadriken
- Auffinden des Hauptachsenpolynoms einer affinen Quadrik durch quadratische Ergänzung
- Die Fixpunktmengen affiner Abbildungen eines affinen Raumes in sich
- Parallelprojektion eines Unterraumes auf einen anderen
- Sesquilinearformen und hermitesche Formen; positive Definitheit
- Begriff des unitären Vektorraumes; elementare Eigenschaften der Norm
- Winkel zwischen Vektoren eines euklidischen Vektorraumes
- Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt
- Orthogonales Komplement eines Unterraumes
- Koordinaten bezüglich Orthonormalbasen (parsevalsche Gleichung und besselsche Ungleichung)
- Begriff des euklidischen affinen Raumes
- Durch die Norm des Translationsraumes definierte Metrik eines affinen euklidischen Raumes
- Orthonormale Koordinatensysteme in euklidischen affinen Räumen
- Elementare Eigenschaften des Vektorprodukts in einem orientierten dreidimensionalen euklidischen Raum
- Koordinaten des Vektorprodukts und Konstruktion von Basen
- Formeln für das Vektorprodukt und Anwendungen (Jacobi-Identität, Abstand von Geraden, plückersche Geradengleichung)
- Der Adjungierte eines Endomorphismus unitärer Vektorräume
- Elementare Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus
- Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen und praktische Ausführung der Spektralzerlegung
- Unitäre Automorphismen
- Cartan-Zerlegung eines Endomorphismus
- Der Spektralsatz für normale Operatoren (komplexer Fall) und Anwendung auf die Klassifikation normaler Operatoren euklidischer Räume
- Typen orthogonaler Endomorphismen euklidischer Vektorräume
- Klassifikation orthogonaler Endomorphismen in den Dimensionen $2, 3$
- Positive und semipositive Endomorphismen unitärer Vektorräume
- Die Wurzel aus einem semipositiven Endomorphismus
- Polare Zerlegung eines Automorphismus und rechnerische Bestimmung der polaren Zerlegung einer regulären Matrix