0.2 Funktoren und natürliche Transformationen

Der Umgang mit kommutativen Diagrammen erleichtert bereits die ersten Schritte der Algebra, beispielsweise Formulierung und Beweis des Homomorphieprinzips für Vektorräume sowie der darauf basierenden Isomorphiesätze (vgl. [RW], 3/2/13 - 3/2/16).
Allgemein lässt sich der Begriff in der Sprache der Funktoren formulieren, die ihrerseits als Morphismen von Kategorien auftreten. Eine – auch im Sinne der Mengenlehre akzeptable – Präzisierung ergibt sich für kleine Kategorien. So gelangen wir zur nächsten Abstraktionsstufe einer *Kategorie von Kategorien.*

Kommutative Diagramme

Universaleigenschaften eignen sich dazu, Objekte zu definieren, die nur in Spezialfällen existieren, dann aber automatisch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind.

Definition. (*Produkt von Objekten*) 0/2/1

$\mathcal{C}$ bezeichnet eine Kategorie, $A, B \in \mathcal{C}$ Objekte. Ein Tripel (P, π_A, π_B) aus einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und Morphismen $\pi_A : P \to A$ und $\pi_B : P \to B$ heißt *Produkt von A und B,* wenn für alle Tripel (Q, p_A, p_B) mit $Q \in \mathcal{C}$ sowie Morphismen $p_A : Q \to A$ und $p_B : Q \to B$ genau ein Morphismus $f : Q \to P$ existiert, für den $\pi_A \cdot f = p_A$ und $\pi_B \cdot f = p_B$ ist.
Wir schreiben dann $P =: A \times B$ und nennen π_A, π_B die *Projektionen des Produkts P auf A bzw. B.* Dass wir eigentlich für P unter den dazu isomorphen Objekten ein eindeutig bestimmtes auswählen müssten, interessiert uns hier ausnahmsweise einmal nicht …

… schon wieder eine mengentheoretische Schlamperei.

Die Eigenschaft aus der Definition lässt sich auch dadurch veranschaulichen, dass

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \\
& Q \arrow[ul, "p_A"] \arrow[u, dotted, "f"'] \arrow[ur, "p_B"'] &
\end{tikzcd}$$

durch einen eindeutig bestimmten Morphismus $Q \to A \times B$ ergänzt werden kann, für den „die beiden kleinen Dreiecke kommutieren."
Es ist zu sehen, dass dieses Produkt als terminales Objekt einer geeigneten Kategorie definiert werden kann.

Überlegen Sie, in welchem Sinne $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ terminal ist!

Anmerkungen. 0/2/2

(1) Wir verwenden auch das Symbol $A \prod B$ für das kategoriale Produkt $A \times B$. Überdies erhalten wir einen dualen Begriff, das *Koprodukt* von Objekten A, B; es wird mit $A \coprod B$ bezeichnet und ergibt sich (zusammen mit entsprechenden Morphismen) durch das initiale Objekt in der Kategorie aller $A \to Q \leftarrow B$.

(2) Analog lassen sich Produkte und Koprodukte für beliebige (nicht notwendig endliche) Familien von Objekten definieren.

Wie welchen Spezialfall erhalten wir für die leere Indexmenge?

Produkte bzw. Koprodukte existieren in verschiedenen der nachfolgend untersuchten Kategorien.

Beispiele.

(1) In der Kategorie (**set**) ist $A \times B$ das (schon bisher mit diesem Symbol bezeichnete) kartesische Produkt der Mengen A und B.

(2) In der Kategorie $(\mathbf{vect}_K)$ der Vektorräume über dem Körper K ist das kategoriale Produkt durch den vertrauten Produktvektorraum gegeben; Koprodukt ist die (äußere) direkte Summe. Beachten Sie den Unterschied für unendliche Familien von Vektorräumen!

Der Produktvektorraum ist das Mengenprodukt mit den naheliegend komponentenweise definierten Operationen.

Wir präzisieren nun den zuvor eher anschaulich verwendeten Begriff des *kommutativen Diagramms* und beginnen mit der folgenden

Definition. (*gerichteter Graph*) 0/2/3

Ein *gerichteter Graph* G besteht aus

- einer Menge E von *Ecken*
- disjunkten Mengen $\mathrm{P}(A,B)$ für $A,B \in E$, deren Elemente *Pfeile* von A nach B genannt werden.

Dabei heißt A die *Quelle* und B das *Ziel* von $f \in \mathrm{P}(A,B)$.

Pfeile $g \in \mathrm{P}(B,C)$ und $f \in \mathrm{P}(A,B)$ heißen verknüpfbar (in dieser Reihenfolge). Ist $(f_1, \dots, f_n)$ eine Folge von $n \geq 1$ Pfeilen, für die f_i mit f_{i+1} verknüpfbar ist ($1 \leq i < n$), so heißt diese ein *Weg* in G. Die Quelle A von f_n heißt auch *Quelle des Weges*, das Ziel von f_1 auch *Ziel des Weges*; wir sprechen dann auch von einem *Weg von* A *nach* B.

Die Reihenfolge beim Begriff der *Verknüpfbarkeit* soll an das Produkt von Abbildungen, bzw. Morphismen erinnern.

Gerichtete Graphen werden naheliegend durch ihre Punkte (Ecken) und Pfeile skizziert.

Durch jede kleine Kategorie wird ein Graph definiert, dessen Ecken die Objekte und dessen Pfeile die Morphismen sind. Eine Komposition von Pfeilen ist für Graphen jedoch nicht gefordert; die Mengen $\mathrm{P}(A,B)$ können beispielsweise für $A = B$ leer sein.

Uns interessieren hier häufig Graphen mit einer kleinen, endlichen Zahl von Ecken, die durch einzelne Objekte und Morphismen einer Kategorie gegeben werden.

Definition. Ein *Diagramm* in der Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Graph G, dessen Ecken aus $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und dessen Pfeile Morphismen mit Quelle und Ziel in der Menge dieser Objekte sind. Es heißt *kommutativ*, falls die folgende Eigenschaft erfüllt ist: 0/2/4

> Für beliebige Wege $(f_1, \dots, f_n)$, $(g_1, \dots, g_m)$ in G mit gleicher Quelle und gleichem Ziel ist $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m$.

Zusammen mit allen Produkten und Identitäten bildet ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie.

Beispiele.

1. Die Objekte der Kategorie $\underline{\mathbf{3}}$ bilden mit ihren nichtidentischen Morphismen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & 3 \\ & 2 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(denn für das einzige Paar verschiedener Wege eines Objekts nach einem anderen gilt $h = g \cdot f$).

2. Ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "g_2"'] \arrow[dr, "h"] & B \arrow[d, "f_1"] \\ C \arrow[r, "g_1"'] & D \end{tikzcd}$$

ist genau dann *kommutativ*, wenn $f_1 \cdot f_2 = g_1 \cdot g_2 = h$ ist.

Die schon bei kleinen Diagrammen oft aufwändige Verifikation der Kommutativität wird treffend als *Diagrammjagd* bezeichnet.

„diagram chasing“

Es ist naheliegend, *Morphismen von Kategorien* zu definieren.

Definition. (*Funktor*)

$\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ bezeichnen Kategorien. Ein (*kovarianter*) *Funktor* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus

(1) einer Vorschrift, die jedem $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt $T(A) \in \mathcal{D}$ zuordnet,

(2) Abbildungen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}\big(T(A), T(B)\big)$, die jedem Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $T(f) : T(A) \to T(B)$ in $\mathcal{D}$ zuordnen,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $T(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{T(A)}$ für alle $A \in \mathcal{C}$, sowie

(ii) $T(g \cdot f) = T(g) \cdot T(f)$ für alle verknüpfbaren Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ der Kategorie $\mathcal{C}$.

Das Zeichen „ · “ bezeichnet die Komposition in der jeweiligen Kategorie.

Der Zusatz *kovariant* wird gewöhnlich weggelassen; wir verwenden ihn gelegentlich zur Unterscheidung gegenüber *kontravarianten Funktoren*; dies sind Funktoren $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ in die duale Kategorie der Kategorie $\mathcal{D}$.
Einen *kontravarianten Funktor* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ können wir daher durch obige Eigenschaften definieren, wenn diese folgendermaßen modifiziert werden:

(2)′ Es sind Abbildungen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}\big(T(B), T(A)\big)$ gegeben, die jedem Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $T(f) : T(B) \to T(A)$ in $\mathcal{D}$ zuordnen.

(ii)′ $T(g \cdot f) = T(f) \cdot T(g)$ für alle verknüpfbaren Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ der Kategorie $\mathcal{C}$.

Beispiele. (*Funktoren*)

(1) Ist $\mathcal{C}'$ Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{C}$, so wird durch $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $A \mapsto A$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $f \mapsto f$ ein Funktor definiert; er heißt *Inklusionsfunktor von* $\mathcal{C}'$ *nach* $\mathcal{C}$.
Ein konkreter Fall ist durch $(\mathbf{ab}) \to (\mathbf{grp})$ gegeben (volle Unterkategorie der abelschen Gruppen in der Kategorie der Gruppen).
Als Spezialfall eines Inklusionsfunktors ergibt sich mit $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ der identische Funktor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ der Kategorie $\mathcal{C}$.

Die Funktoreigenschaft ist in (1) - (4) trivial.

(2) Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & C \\ & B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

der Kategorie $\mathcal{C}$ lässt sich als Funktor $\underline{\mathbf{3}} \to \mathcal{C}$ interpretieren.

(3) $V : (\mathbf{vect}_K) \to (\mathbf{ab})$ bezeichne den Funktor der Kategorie der K-Vektorräume in die der abelschen Gruppen, der einem Vektorraum seine zugrundeliegende abelsche Gruppe, einer linearen Abbildung den zugehörigen Gruppenhomomorphismus zuordnet. Hier werden lediglich einzelne Eigenschaften der Objekte bzw. Morphismen der ersten Kategorie ignoriert; wir sprechen auch von einem *Vergiss-Funktor*.

(4) Auf offensichtliche Weise erhalten wir Vergiss-Funktoren $(\mathbf{grp}) \to (\mathbf{set})$, $(\mathbf{vect}_K) \to (\mathbf{set})$, $(\mathbf{ring}) \to (\mathbf{ab})$, $(\mathbf{ring}) \to (\mathbf{grp})$ usw.

(5) Mit $\mathcal{C}$ bezeichnen wir nun die volle Unterkategorie der endlichdimensionalen Standardräume K^n mit $n \geq 1$ in $(\mathbf{vect}_K)$.
Wir erhalten einen Funktor $\mathcal{C} \to (\mathbf{matr}_K)$ durch $V \mapsto \dim_K(V)$ und $\varphi \mapsto \mathrm{M}(\varphi)$, der jeder linearen Abbildung ihre Matrix (bezüglich der Standardbasen) zuordnet.
Wollen wir anstelle der wenig interessanten Kategorie $\mathcal{C}$ alle endlichdimensionalen Vektorräume ($\neq \mathbf{0}$) untersuchen, so haben wir – in wohlverstandenem Sinn – eine Kategorie aus Paaren $(V, \mathcal{B})$ zu bilden, die in jedem Vektorraum eine Basis auszeichnen.

Präzisieren Sie das!

(6) V bezeichnet einen K-Vektorraum. Der zugehörige (kovariante) Hom-Funktor ${}^V\mathrm{Hom} : (\mathbf{vect}_K) \to (\mathbf{vect}_K)$ wird durch

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_K(V, X) \text{ für } X \in (\mathbf{vect}_K),$$

$$\varphi \mapsto \mathrm{Hom}_K(V, \varphi) \text{ für } \varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, X')$$

definiert. Dabei bezeichnet $\mathrm{Hom}_K(V, \varphi)$ die lineare Abbildung $\mathrm{Hom}_K(V, X) \to \mathrm{Hom}_K(V, X')$ mit $\sigma \mapsto \varphi \cdot \sigma$.
W bezeichnet einen weiteren K-Vektorraum. Der zugehörige kontravariante Hom-Funktor $\mathrm{Hom}^W : (\mathbf{vect}_K) \to (\mathbf{vect}_K)$ wird durch

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_K(X, W) \text{ für } X \in (\mathbf{vect}_K),$$

$$\varphi \mapsto \mathrm{Hom}_K(\varphi, W) \text{ für } \varphi \in \mathrm{Hom}_K(X, X')$$

definiert. Dabei bezeichnet $\mathrm{Hom}_K(\varphi, W)$ die lineare Abbildung $\mathrm{Hom}_K(X', W) \to \mathrm{Hom}_K(X, W)$ mit $\sigma \mapsto \sigma \cdot \varphi$.
Im Spezialfall $W = K$ wird dieser Funktor gewöhnlich mit * bezeichnet (dualer Vektorraum und duale Abbildung, [RW] 3/5/1, 3/5/12).

Analog zum Beispiel (7) können ko- bzw. kontravariante Morphismenfunktoren für eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$ definiert werden, wenigstens in die Kategorie der Mengen: Die Funktoren ${}^A\mathrm{Mor}$ und Mor^B sind durch

$${}^A\mathrm{Mor}(X) := \mathrm{Mor}(A, X) \text{ und } \mathrm{Mor}^B(X) := \mathrm{Mor}(X, B) \qquad (X \in \mathcal{C})$$

und sinngemäße Komposition mit Morphismen definiert. Wir schreiben gelegentlich ${}^A\mathrm{Mor} = \mathrm{Mor}(A, \bigcirc)$ bzw. $\mathrm{Mor}^B = \mathrm{Mor}(\bigcirc, B)$ um durch die Notation auszudrücken, dass an der Leerstelle $\bigcirc$ ein Objekt einzusetzen ist.

Bezeichnungen. Die *Komposition* $S \cdot T$ *von Funktoren* $S : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ und $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ wird naheliegend durch Hintereinanderausführung definiert.
Besitzt $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ einen zweiseitig inversen Funktor $S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (d.h. $S \cdot T = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $T \cdot S = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ sind die identischen Funktoren), so heißt T ein Isomorphismus der Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und wir schreiben auch $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.

T ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die Zuordnung von Objekten und Morphismen bijektiv ist.

Wir sind nun in der Lage, beispielsweise die *Kategorie* $(\mathbf{cat})$ *der kleinen Kategorien* zu definieren: Ihre Objekte sind kleine Kategorien, Morphismen die Funktoren dieser Kategorien.

Für den nachfolgenden Begriff wird gelegentlich auch der Name *Morphismus von Funktoren* verwendet.

Definition. (*natürliche Transformation*)

$\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ bezeichnen Kategorien, $S:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ und $T:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\tau:S\to T$ ist eine Klasse von Morphismen $\tau_A:S(A)\to T(A)$ (mit $A\in\mathcal{C}$), so dass für beliebige Objekte $A, B\in\mathcal{C}$ und Morphismen $f\in\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\ S(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

Sind überdies alle Morphismen τ_A mit $A\in\mathcal{C}$ Isomorphismen in $\mathcal{D}$, so heißt τ eine *natürliche Äquivalenz* (*natürlicher Isomorphismus*) der Funktoren S und T. Beide werden dann auch *natürlich äquivalent* genannt.

Beispiel. (*bidualer Vektorraum*)

K sei ein Körper, $\mathcal{C}:=(\mathbf{vect}_K)$. Dann definiert der biduale Vektorraum mittels $B(V):=V^{**}$ für $V\in\mathcal{C}$ und $B(f):=f^{**}$ für $f:V\to W\in\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ einen Funktor $B:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$.
Durch die kanonischen injektiven Homomorphismen $\iota_V:V\to V^{**}$ erhalten wir eine natürliche Transformation $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to B$ (vgl. [RW] 3/5/16 (2)).

Beschränken wir uns auf die Unterkategorie der endlichdimensionalen Vektorräume, dann erhalten wir sogar eine natürliche Äquivalenz von Funktoren ([RW] 3/5/17 (1)).

Der Begriff der Isomorphie von Kategorien könnte nun über den Begriff des Funktors leicht definiert werden; allerdings ist es häufig wenig interessant, innerhalb einer Kategorie zwischen verschiedenen, aber isomorphen Objekten zu unterscheiden. Aus praktischer Sicht brauchen wir daher die folgende

Definition. Die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen (*natürlich*) *äquivalent*, falls Funktoren $S:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ und $T:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ existieren, für die $T\cdot S$ zum identischen Funktor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ der Kategorie $\mathcal{C}$ sowie $S\cdot T$ zum identischen Funktor $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ der Kategorie $\mathcal{D}$ äquivalent ist. 0/2/5

Beispiel. (*Skelett einer Kategorie*)

Eine volle Unterkategorie $\mathcal{C}'$ der Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *Skelett von* $\mathcal{C}$, falls für alle $A\in\mathcal{C}$ genau ein Objekt $A'\in\mathcal{C}'$ mit $A'\cong A$ existiert.
Wir erhalten einen Inklusionsfunktor $\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$, und die Kategorien $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}'$ sind natürlich äquivalent.

Prüfen Sie die Äquivalenz der Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$.

Ist z.B. K ein Körper und $\mathcal{C}$ die Kategorie der endlichdimensionalen K-Vektorräume, so bildet die volle Unterkategorie $\mathcal{C}'$ der Standardräume K^n ($n\in\mathbb{N}$) ein Skelett für $\mathcal{C}$ und ist damit zu $\mathcal{C}$ äquivalent. $\mathcal{C}'$ ist offensichtlich eine kleine Kategorie, nicht jedoch $\mathcal{C}$.
Wir wissen, dass es hier oft sinnvoller ist, die größere Kategorie $\mathcal{C}$ zu betrachten – die Begriffe des Unterraumes und des Faktorraumes sind in $\mathcal{C}'$ nicht auf nahe liegende Weise zu erklären. ❑