Semesterabschluss: Übung zur Vorlesung Kommutative Algebra mit Methoden der Computeralgebra (M. Roczen)

Lemma. F sei ein flacher Modul, so ist $\mathrm{Tor}_i(F,N) = \mathbf{0}$ für alle R-Moduln N.

Beweis. Wir wählen eine exakte Folge

$$\mathbf{0} \to K \to P \to N \to \mathbf{0},$$

in der P projektiv ist (z.B. ein geeigneter freier Modul). Nach Konstruktion von Tor als links-abgeleiteter Funktor des Tensorprodukts ist $\mathrm{Tor}_i(P,N) = \mathbf{0}$ für alle $i > 0$. Die lange exakte Homologiesequenz

$$\ldots \to \mathrm{Tor}_1(P,N) \to \mathrm{Tor}_1(F,N) \to F \otimes_R K \to F \otimes_R P \to F \otimes_R N \to \mathbf{0}$$

ergibt wegen $\mathrm{Tor}_1(P,N) = \mathbf{0}$ und wegen der Injektivität des Morphismus $F \otimes_R K \to F \otimes_R P$ (folgt aus der Flachheit von F), dass $\mathrm{Tor}_1(F,N) = \mathbf{0}$ ist. Induktiv erhalten wir nun (wieder aus der Homologiesequenz) $\mathrm{Tor}_i(F,N) = \mathbf{0}$ für alle $i > 1$. ❑

12.1 Wir bestimmen mit Singular eine Standardbasis bez. der lex-Ordnung:

```
ring r=5,(x,y,z),lp;
poly f=x2+2y2-y-2z;
poly g=x2+2y2+z-1;
poly h=x2-2yz;
ideal i=f,g,h;
std(i);
```

und erhalten als letztes Eliminationsideal ein Polynom einer Unbestimmten. Faktorisierung verwenden wir zum Test der Irreduzibilität.

```
ring u=(5,a),(x,y,z),lp;
minpoly=a2-2a-2;
ideal i=imap(r,i);
```

Nun könnten wir die anderen Eliminationsideale suchen und testen, welche der gefundenen Werte „zusammenpassen“. Eleganter geht es mittels Primärzerlegung:

```
LIB “primdec.lib“;
primdecGTZ(i);
```

12.5 RESULTAT: Für $i = 2, 3$ erhalten wir $vdim = 1$, sonst nur Nullmoduln; also $Ext^i = 0$ mit Ausnahme von Ext^2, Ext^3 diese sind isomorph K.

11.2 // Homomorphismen von Polynomalgebren, $yi \mapsto fi$
// (i)
ring $R = 0, (x1, x2, x3, y1, y2, y3), lp$;
poly $f1 = x1 + 2 * x2 - x3^2$;
poly $f2 = x2 - x1^2 * x2 * x3$;
poly $f3 = x1 + x2 + x3 - x1 * x2 - x3^2$;

ideal $a = y1 - f1, y2 - f2, y3 - f3;$
std(a);
// ker = 0 , denn alle El. der Std-Basis enthalten ein xi
reduce(x1,std(a));
// nicht surjektiv, da Rest (x1,F) von den xi abhängt, also nicht aus dem Bild ist
// (ii)
poly $f1 = x1 - x2 + x1^2;$
poly $f2 = x1 + x2;$
poly $f3 = x1 - 2 * x2;$
ideal $a = y1 - f1, y2 - f2, y3 - f3;$
std(a);
reduce($x1, std(a)$);
reduce($x2, std(a)$);

9.2 Na ja, das müssen wir nicht unbedingt machen ...
Steht aber im „Skript über die Vorlesung Etalkohomologie“ (H. Kurke, Herbstsemester 1968/69), Teil I, S. 10, 11 (Bibliothek)