Kapitel 0
Formalitäten

Der Begriff der *Kategorie* steht am Anfang dieser Darstellung; er gehört zu den großen vereinheitlichenden Prinzipien der Mathematik und entwickelte sich in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts zum festen Bestandteil ihrer Sprache, vergleichbar – und in gewisser Weise als Fortsetzung – der zuvor entstandenen Sprache der Mengenlehre.
Anfangs manchmal als „abstract nonsense" belächelt, hat sich die *Theorie der Kategorien* als mächtige Technik für Formulierung und Beweis mathematischer Aussagen erwiesen; sie ermöglichte Entwicklungen, die ohne sie schwer vorstellbar gewesen wären. Ihr Entstehen verdankt sie insbesondere S. Mac Lane und S. Eilenberg. Es dürfte kein Zufall sein, dass einer der Schöpfer dieser Theorie auch Koautor des über ein halbes Jahrhundert wohl meistgelesenen Lehrbuchs [BML] der abstrakten Algebra ist.
Heute lässt sich sagen, dass die Kategorientheorie mit einer Vielzahl anfangs kaum absehbarer Anwendungen über das hinausgeht, was Eilenberg und Mac Lane in ihrer Arbeit [EML45] aus geometrischer Sicht bemerken: *This may be regarded as a continuation of the Klein Erlanger Programm, in the sense that a geometrical space with its group of transformations is generalized to a category with its algebra of mappings.*

0.1 Kategorien

In diesem Text werden Kenntnisse über Mengen vorausgesetzt (vgl. z.B. [RW], Kap. 0), jedoch erweist sich dieser Rahmen als zu eng: Indem wir allgemeiner von *Klassen* sprechen, vermeiden wir – z.B. mit der *Klasse aller Mengen* – einige Antinomien, die bei alleiniger Verwendung des Mengenbegriffs kaum zu umgehen wären.

Klassen? „Schon gut! Nur muss man sich nicht allzu ängstlich quälen; Denn eben wo Begriffe fehlen, Da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein." (Mephistopheles)

Definition. (*Kategorie*)

0/1/1

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, deren Elemente *Objekte* genannt werden,
- paarweise disjunkten Mengen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ für $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, deren Elemente *Morphismen* heißen,
- einem *Kompositionsgesetz* (auch *Produkt*), gegeben durch Abbildungen
  $$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C)\,, \quad (g,f) \mapsto g \cdot f$$
  für $A,B,C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (solche Morphismen g, f heißen *verknüpfbar*).

In der Literatur findet sich auch die sehr nachlässige Bezeichnung *Abbildungen* für Morphismen.

Dabei wird gefordert, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D)$ gilt
$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f.$$

(2) Für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ existieren Morphimsen $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ (auch *identische Morphismen* oder *Identitäten* genannt) mit
$$\mathrm{id}_A \cdot f = f \text{ für } f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A) \text{ und } g \cdot \mathrm{id}_A = g \text{ für } g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C).$$

Möglich ist auch eine Definition des Begriffs der *Kategorie*, in der Objekte nicht auftreten – sie sind ja durch die identischen Abbildungen beschrieben.

Anmerkungen – Bezeichnungen.

1. Die *zugrundeliegende Klasse* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ der Objekte ist hier gelegentlich ebenfalls mit dem Symbol $\mathcal{C}$ bezeichnet, es wird also nachlässig einfach $A \in \mathcal{C}$ anstelle von $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ geschrieben.

   Für einen Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißt A die *Quelle* und B das *Ziel*. Es ist üblich, f durch ein Symbol $A \to B$ zu bezeichnen; dies deutet – obwohl nur ausnahmsweise zutreffend – auf eine Abbildung hin.

   In der Literatur werden auch die Bezeichnungen *Domain* für die Quelle, *Kodomain* für das Ziel verwendet.
2. Die (automatisch disjunkte) Vereinigung
$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) := \bigcup_{A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$$
   heißt *Klasse der Morphismen von* $\mathcal{C}$.
   Besteht kein Zweifel über die betrachtete Kategorie, so schreiben wir auch $\mathrm{Mor}(A, B)$ anstelle von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
   Die Komposition $g \cdot f$ wird gelegentlich als gf angegeben; das *Assoziativgesetz* (1) erlaubt es – wie üblich – einige Klammern wegzulassen.
3. Die identischen Morphismen $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ sind eindeutig bestimmt (dies kann aus der Eigenschaft (2) abgelesen werden).
4. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *klein*, falls $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist.
   Zwar trifft diese Eigenschaft für viele der nachfolgend untersuchten Kategorien nicht zu, wir können uns aber in konkreten Fällen gelegentlich darauf beschränken.
   Zu einer präziseren Begriffsbildung gelangen wir durch Wahl eines *Universums*, in dem die wichtigsten mengentheoretischen Operationen ausführbar sind. Dieser Ansatz geht auf A. Grothendieck zurück; er wird hier nicht ausgeführt (vgl. z.B. [Schu]).

   Eine Menge stellen wir uns als „kleine“ Klasse vor und gelangen naheliegend zum Begriff der *kleinen Kategorie*.

Das Musterbeispiel einer Kategorie ist $\mathcal{C} = (\mathbf{set})$, die *Kategorie der Mengen*. Ihre Objekte sind alle Mengen, Morphismen sind die Abbildungen einer Menge in eine andere, d.h. $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Abb}(A, B)$. Dabei ist die Komposition durch Hintereinanderausführung von Abbildungen definiert; Identitäten sind die identischen Abbildungen.

Nun wird klar, warum Abbildungen f als gewisse Tripel (A, B, Γ_f) mit $\Gamma_f \subseteq A \times B$ definiert sind, vgl. auch [RW], V 3/0/6 .

In der Definition einer Kategorie wird die präzise Angabe der Morphismen und des Kompositionsgesetzes oft weggelassen – soweit diese aus der Angabe der Objekte leicht zu entnehmen sind. Ein Gefühl dafür vermitteln folgende

Beispiele.

1. Die Kategorien $\underline{\mathbf{0}}$, $\underline{\mathbf{1}}$, $\underline{\mathbf{2}}$, $\underline{\mathbf{3}}$:
   $\underline{\mathbf{0}}$ bezeichnet die leere Kategorie mit $\mathrm{Ob}(\underline{\mathbf{0}}) = \emptyset$ (dann ist auch $\mathrm{Mor}(\underline{\mathbf{0}}) = \emptyset$).

   Unter 1. sehen wir, dass Morphismen keine Abbildungen sein müssen.

   Die Kategorie $\underline{\mathbf{1}}$ ist durch die einelementige Menge $\mathrm{Ob}(\underline{\mathbf{1}}) = \{1\}$ und durch $\mathrm{Mor}(1, 1) := \{(1, 1)\}$ gegeben; damit ist zwingend $\mathrm{id}_1 = (1, 1)$, und das Kompositionsgesetz wird durch $\mathrm{id}_1 \cdot \mathrm{id}_1 = \mathrm{id}_1$ beschrieben.

   Die Kategorie $\underline{\mathbf{2}}$ ist durch $\mathrm{Ob}(\underline{\mathbf{2}}) = \{1, 2\}$ und $\mathrm{Mor}(1, 1) := \{(1, 1)\}$, $\mathrm{Mor}(2, 2) := \{(2, 2)\}$, $\mathrm{Mor}(1, 2) := \{(1, 2)\}$ gegeben; wieder existiert nur eine (überdies offensichtliche) Möglichkeit, die identischen Morphismen und die Komposition zu wählen:
$$1 \longrightarrow 2$$
   Nun wird eine Kategorie $\underline{\mathbf{3}}$ mit den Objekten $1, 2, 3$ definiert: $\mathrm{Mor}(i, i) := (i, i)$ ($i = 1, 2, 3$), und die von den identischen verschiedenen Morphismen sind $f := (1, 2)$, $g := (2, 3)$, $h := (1, 3)$; sie erfüllen (notwendig) die Bedingung $g \cdot f = h$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & 3 \\ & 2 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

2. Die *Kategorie* (**grp**) *der Gruppen* besitzt als Objekte alle Gruppen, als Morphismen $\mathrm{Mor}(M, N)$ die Menge aller Gruppenhomomorphismen $M \to N$, zusammen mit dem fixierten Gruppenpaar (M, N). Die Komposition ist durch das Produkt von Abbildungen definiert; Identitäten sind durch die identischen Abbildungen gegeben.
   Analog wird die *Kategorie* (**ab**) *der abelschen Gruppen* Gruppen und ihrer Homomorphismen definiert.

Achtung, wenn wir zu $M \to N$ die Gruppenstruktur für M, N nicht fixieren, ist die Disjunktheit der Mengen $\mathrm{Mor}(M, N)$ verletzt!

3. Die *Kategorie* ($\mathbf{vect}_K$) *der Vektorräume über dem Körper K* besitzt als Objekte die K-Vektorräume; $\mathrm{Mor}(V, W) := \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist die Menge der linearen Abbildungen von V nach W, wiederum markiert durch die Vektorräume $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{vect}_K)$. Das Kompositionsgesetz ist durch die übliche Hintereinanderausführung von Abbildungen definiert.

Wir sehen: Das Wort *Morphismus* entstand offenbar als Verkürzung von *Homomorphismus*.

Nachfolgende Beispiele sind analog zu präzisieren.

4. Die *Kategorie* (**ring**) *der Ringe* ist durch alle Ringe und Ringhomomorphismen gegeben. Entsprechend verwenden wir die Bezeichnung (**cring**) für die kommutativen Ringe.

Hier wird *nicht* auf Einselemente verzichtet, und für $f : R \to S$ wird stets $f(1_R) = 1_S$ gefordert.

5. Die *Kategorie* ($\mathbf{alg}_R$) *der R-Algebren* ist durch alle Algebren über dem kommutativen Ring R und die Homomorphismen von R-Algebren gegeben.
6. Die *Kategorie* (**top**) *der topologischen Räume* ist durch alle topologischen Räume und ihre stetigen Abbildungen gegeben.
7. Für ein beliebiges Monoid M ist mittels $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \{M\}$ eine Kategorie mit einem einzigen Objekt definiert, wenn als $\mathrm{Mor}(M, M)$ die zugrundeliegende Menge des Monoids M und als Komposition seine Operation gewählt wird.
   Umgekehrt ergibt sich aus jeder Kategorie mit einem einzigen Objekt A ein Monoid mit der zugrundeliegenden Menge $\mathrm{Mor}(A, A)$.

Der identische Morphismus id_M ist das neutrale Element des Monoids M.

... nachlässig: Monoide sind genau die Kategorien mit einem Objekt.

8. Die Kategorie (**oset**) der geordneten Mengen besitzt als Objekte die geordneten Mengen $(M, \leq)$. Morphismen $(M, \leq) \to (M, \leq')$ bilden wir aus den Abbildungen $f : M \to M'$ mit $f(x_1) \leq' f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in M$, die der Bedingung $x_1 \leq x_2$ genügen.

Die hier als *geordnet* bezeichneten Mengen werden in anderen Darstellungen auch *teilweise* oder *partiell* geordnet genannt.

Definition. (*Unterkategorie*)

0/1/2

Eine *Unterkategorie* $\mathcal{C}'$ der Kategorie $\mathcal{C}$ ist durch eine Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und für $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ durch Mengen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von Morphismen gegeben, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Für $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ ist die Identität aus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ auch Element von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, A)$.

(2) Sind A, B, $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ und $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(B, C)$, so ist $g \cdot_{\mathcal{C}} f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, C)$.

$\mathcal{C}'$ bildet dann mit der Einschränkung der Komposition von $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Weiter wird vereinbart: Die *Unterkategorie* $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{C}$ heißt *voll*, falls für $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ stets $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt.

Beispiele.

1. Die leere Kategorie $\underline{\mathbf{0}}$ ist Unterkategorie jeder Kategorie.

2. Die Kategorie **(ab)** der abelschen Gruppen ist volle Unterkategorie der Kategorie **(grp)** aller Gruppen.
3. Die Kategorie **(cring)** der kommutativen Ringe ist volle Unterkategorie der Kategorie **(ring)** aller Ringe.

Definition (*duale Kategorie*) 0/1/3

Die *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist durch $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A,B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A)$ und die Komposition $g \cdot_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} f := f \cdot_{\mathcal{C}} g$ gegeben.

Kategoriale Begriffe besitzen damit *duale* Aussagen, die dadurch entstehen, dass sie wörtlich für die duale Kategorie formuliert werden. Nachlässig ausgedrückt heißt das: *Die auftretenden Pfeile werden umgekehrt*. Ein erstes Beispiel zur Dualität bilden die folgenden Begriffe.

Definition. (*initiale und terminale Objekte*) 0/1/4

$\mathcal{C}$ sei eine Kategorie.

(1) $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt *initial*, falls für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ genau ein Morphismus $I \to A$ existiert.

Mit anderen Worten: $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I,A)$ ist stets einelementig.

(2) $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt *terminal*, falls für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ genau ein Morphismus $A \to T$ existiert.

Mit anderen Worten: $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,T)$ ist stets einelementig.

Diese Begriffe sind offenbar zueinander *dual*, d.h. ist $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ terminal, so ist A als Objekt der dualen Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ initial (und umgekehrt).

Beispiele.

1. In **(set)** ist die leere Menge $\emptyset$ initial, die einelementige Menge $\{\emptyset\}$ dagegen terminal.
2. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist initial in **(ring)**, der *Nullring* ist terminal. Warum?
3. In der Kategorie $(\mathbf{vect}_K)$ der Vektorräume über dem Körper K ist der Nullvektorraum sowohl terminal als auch initial.
4. Es gibt Kategorien ohne initiale bzw. terminale Objekte (vgl. Beispiel 6 in 0/1/1 mit $|M| \neq 1$).

Spezielle Morphismen

Definition. (*erste Eigenschaften von Morphismen*) 0/1/5

$\mathcal{C}$ sei eine Kategorie, $f : A \to B$ ein Morphismus.

(1) f heißt *Monomorphismus*, falls für $g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}(C,A)$ mit $fg_1 = fg_2$ stets $g_1 = g_2$ ist.

D.h. f ist „von links kürzbar."

(2) f heißt *Epimorphismus*, falls für $h_1, h_2 \in \mathrm{Mor}(B,D)$ mit $h_1 f = h_2 f$ stets $h_1 = h_2$ ist.

D.h. f ist „von rechts kürzbar."

(3) f heißt *Isomorphismus*, falls ein Morphismus $g : B \to A$ existiert, für den $g \cdot f = \mathrm{id}_A$ und $f \cdot g = \mathrm{id}_B$ gilt. Durch diese Bedingungen ist g offenbar eindeutig bestimmt; wir schreiben auch $g =: f^{-1}$.

Überzeugen Sie sich von der Eindeutigkeit des Morphismus g!

Bemerkung – Bezeichnungen.

1. $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bezeichnen Morphismen in $\mathcal{C}$.

Sind f und g Monomorphismen (Epimorphismen, Isomorphismen), so ist auch $g \cdot f$ ein Monomorphismus (Epimorphismus, Isomorphismus).

Ist $g \cdot f$ Monomorphismus, so ist auch f Monomorphismus.

Ist $g \cdot f$ Epimorphismus, so ist auch g Epimorphismus.

2. Für $A \in \mathcal{C}$ werden die Elemente von $\mathrm{Mor}(A, A)$ auch *Endomorphismen* von A genannt, die Isomorphismen unter ihnen heißen *Automorphismen.*
   Die Endomorphismen des Objekts A bilden mit der Komposition von $\mathcal{C}$ ein Monoid $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A)$, die Automorphismen eine Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(A)$; neutrales Element ist in beiden Fällen id_A.
3. Eistiert ein Isomorphismus in $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, so heißen A und B isomorph. Wir drücken das durch das Zeichen $A \underset{\mathcal{C}}{\cong} B$ aus (kurz $A \cong B$).

   Durch $\cong$ wird offenbar eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von Objekten der Kategorie $\mathcal{C}$ definiert.
4. Ein Isomorphismus ist stets auch Monomorphismus und Epimorphismus.

   Suchen Sie ein Beispiel, in dem die Umkehrung von 3. falsch ist!
5. In der Kategorie der Mengen ist die Eigenschaft (1) zur Injektivität von f äquivalent, Eigenschaft (2) zur Surjektivität. Sind beide erfüllt, so ist f ein Isomorphismus. In beliebigen Kategorien muss das nicht stimmen!

Beweis. Die Behauptungen sind mehr oder weniger trivial; wir zeigen beispielsweise den letzten Teil von 1. Dazu sei gf Epimorphismus; wir zeigen, dass auch g Epimorphismus ist: Sind $h_1, h_2 : C \to D$ Morphismen mit der Eigenschaft $h_1 g = h_2 g$, so folgt zunächst durch Komposition mit f, dass $h_1(gf) = h_2(gf)$ gilt. Nach der Voraussetzung ist dann $h_1 = h_2$. ❑

Beispiele.

1. In der Kategorie $(\mathbf{vekt}_K)$ der Vektorräume über einem Körper K ist ein (Homo)morphismus genau dann Monomorphismus (bzw. Epimorphismus, Isomorphismus) wenn er injektiv (bzw. surjektiv, bijektiv) ist.
2. Der Morphismus $f : A \to B$ heißt *Retraktion*, falls ein Morphismus $g : B \to A$ existiert, für den $fg = \mathrm{id}_B$ ist. f ist unter dieser Voraussetzung ein Epimorphismus.

   D.h. es existiert ein *rechtsinverser* Morphismus.
3. Der Morphismus $g : B \to A$ heißt *Koretraktion*, falls ein Morphismus $f : A \to B$ existiert, für den $fg = \mathrm{id}_B$ ist. g ist unter dieser Voraussetzung ein Monomorphismus.

   D.h. es existiert ein *linksinverser* Morphismus.

Lemma. (*Eindeutigkeit initialer bzw. terminaler Objekte*) 0/1/6

Terminale (bzw. initiale) Objekte einer Kategorie sind isomorph, genauer: Zwischen zwei solchen Objekten existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus; dieser ist ein Isomorphismus.

Beweis. Angenommen, $T, T' \in \mathcal{C}$ sind terminal. Dann existiert genau ein Morphismus $f : T \to T'$ und genau ein Morphismus $g : T' \to T$. Nun ist $gf : T \to T$ der einzige Endomorphismus des terminalen Objekts T, daher $gf = \mathrm{id}_T$. Analog ergibt sich $fg = \mathrm{id}_{T'}$.

Die entsprechende Aussage für initiale Objekte ergibt sich nun aus der Eindeutigkeit terminaler Objekte in der dualen Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. ❑

Das Lemma rechtfertigt in gewisser Weise die Nachlässigkeit, von *dem* initialen bzw. *dem* terminalen Objekt zu sprechen.

Bereits in der linearen Algebra sind uns Eindeutigkeitsaussagen begegnet, die ein Objekt gegenüber anderen Objekten einer Kategorie auszeichen; es ist dann üblich, das Objekt (bezüglich gegebener Eigenschaften) *universell* zu nennen. Dies kann durch den Begriff des initialen Objekts präzisiert werden.

Beispiel. (*Universaleigenschaft des Polynomringes* $\mathbb{Z}[X]$)

$\mathcal{C}$ bezeichne die Kategorie der Paare (R, r) mit $R \in (ring)$ und $r \in R$; Morphismen $(R, r) \to (R', r')$ definieren wir durch Ringhomomorphismen $R \to R'$, die r auf r' abbilden.

Dann ist das Paar $(\mathbb{Z}[X], X)$ initial in $\mathcal{C}$ (vgl. [RW, 1/2/14). ❑

einige Kategorien		
Symbol	Objekte	Morphismen gegeben durch
(**set**)	Mengen	Abbildungen
(**oset**)	geordnete Mengen	ordnungserhaltende Abbildungen
$\underline{\mathbf{0}}$	[keine]	[keine]
$\underline{\mathbf{1}}$	1	Identität
$\underline{\mathbf{2}}$	1, 2	$1 \to 2$ und Identitäten
$\underline{\mathbf{3}}$	1, 2, 3	$1 \to 2$, $2 \to 3$, $1 \to 3$ und Identitäten
(**grp**)	Gruppen	Gruppenhomomorphismen
(**ab**)	abelsche Gruppen	Gruppenhomomorphismen
($\mathbf{vect}_K$)	K-Vektorräume	lineare Abbildungen (K bezeichnet einen festen Körper)
(**ring**)	Ringe	Ringhomomorphismen
($\mathbf{matr}_R$)	positive natürliche Zahlen	$\mathrm{Mor}(m,n) := \mathrm{M}(n,m;R)$ (R bezeichnet einen gegebenen, kommutativen Ring)
(**cring**)	kommutative Ringe	Ringhomomorphismen
($\mathbf{alg}_R$)	R-Algebren	R-Algebra-Homomorphismen (R bezeichnet einen gegebenen, kommutativen Ring)
($\mathbf{mod}_R$)	R-Moduln	R-Modul-Homomorphismen (R bezeichnet einen gegebenen, kommutativen Ring)
(**top**)	topologische Räume	stetige Abbildungen