Aufgabenblatt 14

Abgabe: 24.02.2020

Aufgabe 1.
Klaus und Dieter vereinbaren das folgende Spiel:
Klaus nimmt 6 Bindfäden gleicher Länge in eine Hand, sodass an jeder Seite der Faust sechs Bindfadenenden herausragen. Dieter wird aufgefordert, die Enden auf jeder Seite paarweise zusammenzuknüpfen. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, dass die Bindfäden einen einzigen Ring bilden, so hat Dieter gewonnen, anderenfalls gewinnt Klaus.
Wer von beiden hat die größeren Gewinnchancen? Stelle dazu folgende Überlegungen an!

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten die Bindfadenenden zu verknüpfen gibt es?

b) In wie vielen Fällen erhält man einen einzigen Ring?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein einziger Ring entsteht?

Aufgabe 2.
Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressaten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben. Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).
Man beweise: Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, dass bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

Hinweis: Betrachte die „günstigen Fälle“ g_n und beweise induktiv, dass

$$g_n = (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n + (-1)^3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n + \ldots + (-1)^n \cdot 1$$

gilt. Führe dabei g_n auf g_{n-1} und g_{n-2} zurück. Betrachte dafür die Möglichkeiten, dass der Adressat von Brief 1 falsch aufgeschrieben wird (o.B.d.A. auf Brief 2) und die Möglichkeiten des Adressaten von Brief 2. Letzteres lässt sich in zwei Fälle aufteilen, die g_{n-1} bzw. g_{n-2} Möglichkeiten haben.

Homepage: `https://www2.math.hu-berlin.de/~schadema/msg`