# Aufgabenblatt 26

Abgabe: 13.06.2016

**Aufgabe 1.**
Von $n$ Städten seien immer je zwei verschiedene durch eine Einbahnstraße verbunden. Zeige mittels vollständiger Induktion, dass es immer eine Stadt gibt, von der aus man mit dem Auto jede andere der $n$ Städte erreichen kann. (gegebenenfalls über Umwege durch andere Städte)

**Aufgabe 2.**
Beweise folgende Aussagen mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen $n$.

a) $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar

b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

**Aufgabe 3.**
Finde jeweils den Fehler:

a) **Behauptung**: Alle ungeraden Zahlen sind durch 2 teilbar.
**Beweis**: Sei $n$ die $n$-te ungerade Zahl, welche durch 2 teilbar ist. Die $(n+1)$-te ungerade Zahl ist dann $n+2$ und ist damit eine Summe aus zwei durch 2 teilbaren Summanden und damit wieder durch 2 teilbar. Aus der vollständigen Induktion folgt, dass alle ungeraden Zahlen durch 2 teilbar sind.

b) **Behauptung**: Es passen unendlich viele Sandkörner in einen LKW.
**Induktionsanfang**: Da ein Sandkorn sehr klein ist, passt auf jeden Fall ein Sandkorn in einen LKW.
**Induktionsschritt**: Gehen wir davon aus, dass $n$ Sandkörner im LKW sind. Da ein Sandkorn sehr, sehr klein ist im Vergleich zum Laderaum eines LKWs, passt ein zusätzliches Sandkorn auf jeden Fall in den LKW rein. Damit passen auch $n+1$ Sandkörner in einen LKW.

Daraus folgt, es passen beliebig viele Sandkörner in einen LKW.

c) **Behauptung**: Auf einer Party mit $n \geq 1$ Gästen heißt jeder gleich.
**Induktionsanfang**: Wenn auf einer Party nur ein Gast ist, ist die Aussage wahr (weil es nur einen Namen gibt).
**Induktionsschritt**: Seien auf einer Party $n+1$ Gäste. Wir schicken einen raus. Dann sind auf dieser Party nur noch $n$ Gäste. Nach Induktionsvoraussetzung haben all diese $n$ Gäste den gleichen Namen. Nun holen wir den Gast, der draußen stand, wieder rein und schicken einen anderen Gast raus. Nun haben nach Induktionsvoraussetzung wieder alle den gleichen Namen. Also müssen alle $n+1$ Gäste den gleichen Namen haben.

Daraus folgt, dass alle Gäste auf einer Party gleich heißen.

Homepage: `https://www2.math.hu-berlin.de/~schadema/msg/msg.html`