**Humboldt-Universität zu Berlin**
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

---

## Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

### Übungsblatt 10

Abgabe 9.1.2017 vor der Vorlesung.

---

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

**1. Multiple Choice Frage**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

MC. 1. Es seien $V, W$ Vektorräume über einem gemeinsamen Körper $K$ und es sei $T \in Hom(V, W)$. Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, so sind $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ linear unabhängig.

☐ wahr ☐ falsch

MC. 2. Es seien $V, W$ Vektorräume über einem gemeinsamen Körper $K$ und es sei $T \in Hom(V, W)$. Dann ist $T(V)$ ein Unterraum von $W$.

☐ wahr ☐ falsch

MC. 3. Wir betrachten die Abbildung $f : \Pi_n \to \Pi_n$, die jedes Polynom $p \in \Pi_n$ auf dessen Ableitung abbildet, d.h. $p \mapsto p'$. Hierbei bezeichnen wir mit $\Pi_n$ die Menge aller reellen Polynome, deren Grad $n$ nicht übertrifft, d.h. $\Pi_n := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \text{ mit } \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$.
Diese Abbildung $f$ ist linear.

☐ wahr ☐ falsch

MC. 4. Es sei $K$ ein Körper. Wir betrachten Matrizen mit Einträgen in $K$. Die Addition zweier Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, ist kommutativ.

☐ wahr ☐ falsch

MC. 5. Es sei $K$ ein Körper. Wir betrachten Matrizen mit Einträgen in $K$. Die Matrixmultiplikation zweier Matrizen $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times m}$, $m, n \in \mathbb{N}$, ist kommutativ.

☐ wahr ☐ falsch

**2.** (i) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

– $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$ für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
- $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_3(x) = \begin{pmatrix} |x_1| \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
- $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_4(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Stellen Sie die linearen Abbildungen aus (i) mit Hilfe von Matrizen kompakter dar.

**3**. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

als Abbildung eine Drehung um den Nullpunkt mit dem Drehwinkel $\alpha$ im $\mathbb{R}^2$ beschreibt. (Hinweis: Man verwende die Darstellung eines Punktes in Polarkoordinaten:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

mit $r = |v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ und $\phi = \begin{cases} \arccos \frac{v_1}{r}\,, & \text{falls } v_2 \geq 0 \\ -\arccos \frac{v_1}{r}\,, & \text{falls } v_2 < 0 \end{cases}.$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für die Winkelfunktionen sin und cos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

und

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

ergibt sich die Behauptung.)

**4**. Betrachten Sie folgende Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Erörtern Sie, zwischen welchen Matrizen die Operationen Addition und Multiplikation möglich sind und berechnen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.