Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Übungsblatt 11

Abgabe 16.1.2017 vor der Vorlesung.

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. **Multiple Choice Frage**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

MC. 1. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir bezeichnen mit $Diag_n(K)$ die Menge der Diagonalmatrizen in $K^{n\times n}$, d.h. $D = (d_{ij})_{i,j} \in Diag_n(K)$, falls $d_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.

Dann ist die Menge der Diagonalmatrizen bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen, d.h. $D, B \in Diag_n(K)$, dann ist auch $D \cdot B \in Diag_n(K)$.

☐ wahr ☐ falsch

MC. 2. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir bezeichnen mit $UTriag_n(K)$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $K^{n\times n}$, d.h. $U = (u_{ij})_{i,j} \in UTriag_n(K)$, falls $u_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

Dann ist die Menge der oberen Dreiecksmatrizen bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen, d.h. $U, B \in UTriag_n(K)$, dann ist auch $U \cdot B \in UTriag_n(K)$.

☐ wahr ☐ falsch

MC. 3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir bezeichnen mit $Diag_n(K)$ die Menge der Diagonalmatrizen in $K^{n\times n}$, d.h. $D = (d_{ij})_{i,j} \in Diag_n(K)$, falls $d_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.

Dann ist die Matrixmultiplikation in $Diag_n(K)$ kommutativ.

☐ wahr ☐ falsch

MC. 4. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir bezeichnen mit $UTriag_n(K)$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $K^{n\times n}$, d.h. $U = (u_{ij})_{i,j} \in UTriag_n(K)$, falls $u_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

Dann ist die Matrixmultiplikation in $UTriag_n(K)$ kommutativ.

☐ wahr ☐ falsch

MC. 5. Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Jeder linearen Abbildung $T \in Hom(K^n, K^m)$ kann eindeutig eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ zugeordnet werden.

☐ wahr ☐ falsch

2. Es sei K ein Körper. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Matrixaddition und Multiplikation:

(i) Für $A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times l}$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt

$$(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB)\,.$$

(ii) Für $A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times l}, C \in K^{l\times p}$ gilt

$$(AB)C = A(BC)\,.$$

(iii) Für $A \in K^{m\times n}, B, C \in K^{n\times l}$ gilt

$$A(B + C) = AB + AC\,.$$

(iv) Für $A, B \in K^{m\times n}, C \in K^{n\times l}$ gilt

$$(A + B)C = AC + BC\,.$$

3. Es sei K ein Körper.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge $K^{m\times n}$ mit der Addition und der skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist.

(ii) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Vektorraumes $K^{m\times n}$.

4. Geben Sie eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ in Matrixschreibweise an mit $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie zudem, dass T nicht eindeutig bestimmt ist.