Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Übungsblatt 12

Abgabe 23.1.2017 vor der Vorlesung.

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. **Multiple Choice Frage**

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

   MC. 1. Es sei Π_n der Vektorraum aller reellen Polynome, deren Grad n nicht übertrifft, d.h. $\Pi_n := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Dann ist Π_n isomorph zu $\mathbb{R}^n$. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 2. Es sei K ein Körper. Dann ist $K^{m\times n}$ isomorph zu $K^{n\times m}$. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 3. Es seien V, W Vektorräume über einem Körper K und $T \in Hom(V, W)$. Dann gilt: Ist $w \in \operatorname{im}(T)$ und ist $u \in T^{-1}(\{w\})$ beliebig, so ist

   $$T^{-1}(\{ w \}) = u + \ker(T) := \{ u + v \mid v \in \ker(T) \} .$$

   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 4. Es sei K ein Körper und $A \in K^{m\times n}$. Falls $\operatorname{rank} A = n$ ist, so sind die Spalten von A linear unabhängig. ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 5. Es sei K ein Körper und $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt:

   $$\operatorname{rank}(A) \leq n .$$

   ☐ wahr ☐ falsch

2. Es seien V, W endlich dimensionale Vektorräume mit $\dim(V) = \dim(W)$ und $T \in Hom(V, W)$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) T ist injektiv.

   (ii) T ist surjektiv.

   (iii) T ist bijektiv.

3. Es sei K ein Körper. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Für $A, B \in K^{m\times n}$ gilt $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.

(ii) Für $A \in K^{m\times n}$ gilt $(A^\top)^\top = A$.

(iii) Für $A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times l}$ gilt $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

(iv) Es seien $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar. Zeigen Sie:

(α) A^{-1} ist invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.

(β) AB ist invertierbar mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(γ) Ist $\lambda \in K \setminus \{0\}$, so ist λA invertierbar mit $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

4. Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die folgende Schar linearer Abbildungen gegeben:

$$\begin{aligned} T_\alpha : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 \\ (\alpha-1)x_1 - x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für welche Werte α ist T_α injektiv, surjektiv und/oder bijektiv?