Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Übungsblatt 13

Abgabe 30.1.2017 vor der Vorlesung.

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. **Multiple Choice Frage**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

MC. 1. Es seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Ferner seien $A = \{ v_1, \dots, v_n \}$ eine Basis von V und $B = \{ w_1, \dots, w_m \}$ eine Basis von W. Dann ist $dim(Hom(V, W)) = mn$. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 2. Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 3. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Eine Diagonalmatrix $D = (d_{ij})_{i,j} \in Diag_n(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $d_{ii} \neq 0$ für (mindestens) ein $i \in \{ 1, \dots, n \}$ gilt. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 4. Es sei K ein Körper. Wir betrachten ein LGS $Ax = b$, $A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$. Dann gilt, dass die Lösungsmenge $Lös(A, b) := \{ x \in K^n \mid Ax = b \}$ für jedes $b \in K^m$ ein Untervektorraum des K^n ist. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 5. Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat immer mindestens eine Lösung. ☐ wahr ☐ falsch

2. (i) Geben Sie jeweils ein Beispiel eines linearen reellen Gleichungssystems von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten folgenden Typs an:

(α) Die Lösungsmenge sei leer.

(β) Die Lösungsmenge bestehe aus genau einem Punkt des $\mathbb{R}^3$.

(γ) Die Lösungsmenge sei eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.

(δ) Die Lösungsmenge sei eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

(ϵ) Die Lösungsmenge sei der ganze $\mathbb{R}^3$.

(ii) Kann es vorkommen, dass ein lineares Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten keine Lösung hat? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.
(Die Lösungsmenge ist definiert als $L\ddot{o}s(A, b) := \{ x \in K^n \mid Ax = b \}$.)

3. Zeigen Sie folgende Aussage: Ist $C \in K^{m\times m}$ invertierbar, und sind $A \in K^{m\times n}$ sowie $b \in K^m$, so ist $Ax = b$ äquivalent zu $CAx = Cb$, d.h. $L\ddot{o}s(A, b) = L\ddot{o}s(CA, Cb)$

4. Es sei Π_4 der Vektorraum aller reellen Polynome, deren Grad 4 nicht übertrifft, d.h. $\Pi_4 := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ p(x) = \sum_{k=0}^{4} \alpha_k x^k \text{ mit } \alpha_0, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}$. Zudem sei die folgende (lineare) Abbildung gegeben:

$$F : \Pi_4 \to \Pi_4 \quad \text{mit } p(x) \mapsto p''(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

d.h. F bildet jedes Polynom $p \in \Pi_4$ auf die zweite Ableitung p'' ab.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_A^A(F)$ bezüglich der Standardbasis $A = \{ 1, x, x^2, x^3, x^4 \}$ in Π_4.

(ii) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von $M_A^A(F)$.

(iii) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von $M_A^A(F)$.