Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Übungsblatt 3

Abgabe 7.11.2016 vor der Vorlesung.

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. Es seien X, Y nichtleere Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung, U, V Teilmengen von X und W, Z Teilmengen von Y. Beweisen Sie:

(i) $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$,
(ii) $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$,
(iii) $f^{-1}(W \cup Z) = f^{-1}(W) \cup f^{-1}(Z)$,
(iv) $f^{-1}(W \cap Z) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(Z)$,

und zeigen Sie, dass die Inklusion im Allgemeinen keine Gleichheit ist.

2. (i) Sind folgende Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv (mit Begründung)?

- $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$.
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2)$.
- $f_3 : \Pi_n \to \Pi_n$, wobei wir mit Π_n die Menge aller reellen Polynome, deren Grad n nicht übertrifft, bezeichnet, d.h. $\Pi_n \coloneqq \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Die Abbildung f_3 bildet jedes Polynom $p \in \Pi_n$ auf dessen Ableitung ab, d.h. $p \mapsto p'$.

(ii) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

3. Es seien M eine endliche, nichtleere Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv,
(ii) f ist surjektiv,
(iii) f ist bijektiv,

4. Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $g \circ f$ ist surjektiv $\Rightarrow$ g ist surjektiv.
(ii) $g \circ f$ ist injektiv $\Rightarrow$ f ist injektiv.