Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Übungsblatt 4

Abgabe 14.11.2016 vor der Vorlesung.

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. **Multiple Choice Frage**

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

   MC. 1. Es seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Abbildung $f_{|f^{-1}(Y)} : f^{-1}(Y) \to Y$ ist surjektiv.
   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 2. Es seien X eine nichtleere Menge und $f : X \to X$ eine Abbildung. Die Abbildung $f : X \to X$ ist genau dann injektiv, wenn $f \circ f$ injektiv ist.
   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 3. Die Relation $R := \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y \}$ ist eine Äquivalenzrelation.
   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 4. Gegeben seien nichtleere Mengen X, Y und eine Abbildung $f : X \to Y$. Durch $x_1 \sim x_2$, falls $f(x_1) = f(x_2)$, wird eine Äquivalenzrelation in X definiert.
   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 5. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden mit der üblichen Multiplikation eine kommutative Gruppe. ☐ wahr ☐ falsch

2. Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (i) f^{-1} ist bijektiv mit $(f^{-1})^{-1} = f$.

   (ii) $g \circ f$ ist bijektiv mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. (i) Es sei $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{ 0 \}) = \{ (p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$. Es seien $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in M$. Zeigen Sie, dass durch

   $$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)\,, \quad \text{falls } p_1 \cdot q_2 = q_1 \cdot p_2$$

   eine Äquivalenzrelation definiert ist ($\cdot$ bezeichnet hier die übliche Multiplikation in den ganzen Zahlen.)

(ii) Es seien M eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Beweisen Sie, dass für die zugehörigen Äquivalenzklassen gilt

$$M = \cup_{x \in M} [x]_\sim \qquad \text{und} \qquad [x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset \text{ für } [x]_\sim \neq [y]_\sim \,.$$

4. (i) Es sei $\mathbb{Z}_m := \{ 0, 1, \ldots, m-1 \}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_m, *)$ eine abelsche Gruppe ist mit der Verknüpfung

$$k * l := \begin{cases} k + l \,, & \text{falls } k + l \leq m - 1 \\ k + l - m \,, & \text{falls } k + l \geq m \end{cases}$$

für $k, l \in \mathbb{Z}_m$ (+ bezeichnet hier die übliche Addition in den ganzen Zahlen).

(ii) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Zeigen Sie folgende Aussage: Für alle $a, b \in G$ sind die Gleichungen $a * x = b$ und $y * a = b$ eindeutig lösbar, und die Lösungen sind $x = a^{-1} * b$ sowie $y = b * a^{-1}$.