Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Übungsblatt 5

Abgabe 21.11.2016 vor der Vorlesung.

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. **Multiple Choice Frage**

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

   MC. 1. Es seien $(G, *)$ eine abelsche Gruppe und $(H, *)$ eine Untergruppe von G. Dann gilt für das neutrale Element e_G in G und das neutrale Element e_H in H, dass $e_G = e_H$.

   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 2. Es gibt einen Körper mit genau einem Element.

   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 3. Für eine Gruppe $(G, *)$ gilt stets:

   $$\forall x, y \in G : \quad x * y = e \quad \Rightarrow y * x = e\,.$$

   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 4. Es seien M eine nichtleere Menge und $B(M) := \{\, f : M \to M \,\}$ Menge aller Abbildungen von M nach M. Als Verknüpfung betrachten wir die Komposition von Abbildungen. Dann ist $(B(M), \circ)$ eine Gruppe.

   ☐ wahr ☐ falsch

   MC. 5. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann ist das neutrale Element eindeutig.

   ☐ wahr ☐ falsch

2. (i) Es sei M eine nichtleere Menge und es sei

   $$S(M) := \{\, f : M \to M \mid \; f \text{ bijektive Abbildung} \,\}$$

   mit Verknüpfung $\circ$ (Komposition). Zeigen Sie, dass $(S(M), \circ)$ eine Gruppe ist.

   (ii) Ist speziell $M = \{\, 1, \ldots, n \,\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so heißt $S_n := S(\{\, 1, \ldots, n \,\})$ symmetrische Gruppe vom Grad n. Zeigen Sie, dass S_2 abelsch ist.

(iii) Zeigen Sie, dass S_3 nicht abelsch ist und folgern Sie daraus, dass jede Gruppe S_n mit $n \geq 3$ nicht abelsch ist.

3. (i) Es seien $(G, *)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq H \subset G$ eine nichtleere Teilmenge von G mit der Eigenschaft, dass $a * b \in H$ für alle $a, b \in H$. Beweisen Sie, dass $(H, *)$ genau dann eine Untergruppe von der Gruppe $(G, *)$ ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(α) $\emptyset \neq H \subset G$.

(β) $a * b \in H$ für alle $a, b \in H$.

(γ) Für jedes $a \in H$ ist sein inverses Element $a^{-1} \in H$.

(ii) Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathbb{R}, +)$. Ist $(\mathbb{R}_+, +)$ eine Untergruppe?

4. (i) Es sei $K = \{0, 1\}$ mit folgender Addition und Multiplikation

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist.

(ii) Zeigen Sie, dass in einem Körper $1+1=0$ genau dann gilt, wenn $1+1+1+1=0$.