Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin
Dr. Claudia Schillings

Lineare Algebra und analytische Geometrie (WS 16/17)

Übungsblatt 6

Abgabe 28.11.2016 vor der Vorlesung.

Weitere Informationen zur Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `https://www2.mathematik.hu-berlin.de/~schillcl/Homepage_LinAlg/index.html`

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Namen (2er Teams), Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (Übungstermin und Übungsleiter)! Heften Sie mehrere Blätter für jeweils eine Aufgabe zusammen!

1. Multiple Choice Frage

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden Ihnen zwei Punkte abgezogen. (Negative Punkte sind nicht möglich.)

MC. 1. Jeder Körper ist ein kommutativer Ring mit Einselement. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 2. Jeder kommutative Ring mit Einselement ist ein Körper. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 3. In einem kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ mit Einselement gilt: $a \cdot b = 0$ impliziert $a = 0$ oder $b = 0$. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 4. Die ganzen Zahlen bilden mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper. ☐ wahr ☐ falsch

MC. 5. Es sei $K[X]$ die Menge der Polynome über einem Körper K mit der in der Vorlesung definierten Addition und Multiplikation. Für $P, Q \in K[X]$ gilt

$$deg(P+Q) = deg(P) + deg(Q) \quad \text{und} \quad deg(P \cdot Q) = deg(P) \cdot deg(Q)$$

☐ wahr ☐ falsch

2. Betrachten Sie die Mengen $K_j := \{ k \mid k = 4m + j,\ m \in \mathbb{Z} \}$ mit $j \in \mathbb{N}$ und $R := \{ K_0, K_1, K_2, K_3 \}$. Die Verknüpfungen $+ : R \times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$ werden definiert durch

$$K_i + K_j := \{ k \mid k = 4m + i + j,\ m \in \mathbb{Z} \}$$

und

$$K_i \cdot K_j := \{ k \mid k = 4m + ij,\ m \in \mathbb{Z} \} .$$

(i) Geben Sie K_0, K_1, K_2 und K_3 in aufzählender Schreibweise an.

(ii) Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

3. Zeigen Sie, dass die Menge $K[X]$ der Polynome über einem Körper K mit der in der Vorlesung definierten Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

4. (i) Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring mit Einselement 1. Zeigen Sie, dass $1=0$ genau dann gilt, wenn $R=\{0\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass ein kommutativer Ring $(R,+,\cdot)$ mit Einselement 1 genau dann ein Körper ist, falls $0\neq 1$ gilt und jedes $a\in R\setminus\{0\}$ invertierbar ist.

(iii) Ein Ring $(R,+,\cdot)$ heißt nullteilerfrei, wenn gilt:

$$\forall a,b\in R:\ a\cdot b=0\Rightarrow a=0\vee b=0\,.$$

Zeigen Sie, dass, falls $(R,+,\cdot)$ nullteilerfrei ist, so gilt

$$\forall a,b,c\in R:\ (a\cdot b=a\cdot c\wedge a\neq 0)\Rightarrow b=c\,.$$